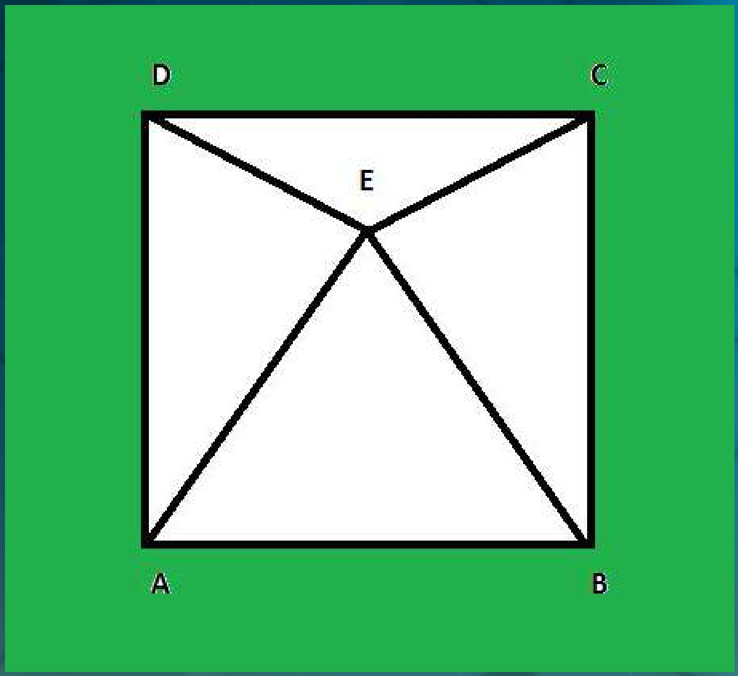
Costel Drăgoi

Probleme de geometrie plană rezolvate pentru gimnaziu



Presa Universitară Clujeană

COSTEL DRĂGOI

PROBLEME DE GEOMETRIE PLANĂ REZOLVATE PENTRU GIMNAZIU

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2018

Referenţi ştiinţifici:

Prof. univ. dr. Ferucio Laurențiu Țiplea
Conf. univ. dr. Maria S. Pop

ISBN 978-606-37-0412-3

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro

"Lucrul cel mai minunat cu care ne putem întâlni este misterul. La baza artei şi ştiinţei adevărate se află emoţia primară. Cel care nu ştie acest lucru şi nu poate fi curios sau simţi uimire este ca şi mort, asemenea une lumânări stinse".

Albert Einstein

“Dacă ai voință poți muta și munții din loc,dar dacă ai minte îi lași acolo unde sunt, că nu te deranjează”

Murphy

Cuvânt înainte

Lucrarea este alcătuită din trei capitole. Capitolul I- Unghiuri, Capitolul II- Triunghiuri, Capitolul III- Patrulatere particulare. Conține 101 probleme rezolvate și se adreseaza elevilor de gimnaziu pasionați de matematică și profesorilor de matematică, ca instrument de lucru. Am avut în vedere atât tehnica matematică cât și creativitatea, necesară în abordarea problemelor. Este recomandat să se resolve problemele și apoi să se compare cu soluțiile date în lucrare. Orice soluție diferită de cea prezentată în lucrare constituie un bun câștigat. Doresc success celor care parcurg această lucrare!

Prof. Drăgoi Costel

“Teoria demonstrației însemană un acompaniament la procesle gândirii demonstratoare”

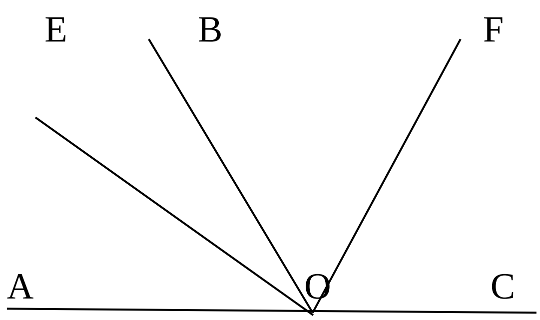
D. Hilbert

Capitolul I

1. <AOB şi <BOC sunt adiacente şi suplementare [OE – bisectoarea <AOB, [OF- bisectoarea < BOC.

Aflaţi m(<EOF)

Soluţie:



Notăm cu m (<AOB) = x^o => m(<BOC) = $180^o - x^o$

$$m(<EOB) = \frac{x^o}{2}, \quad m(<BOF) = \frac{180^o - x^o}{2}$$

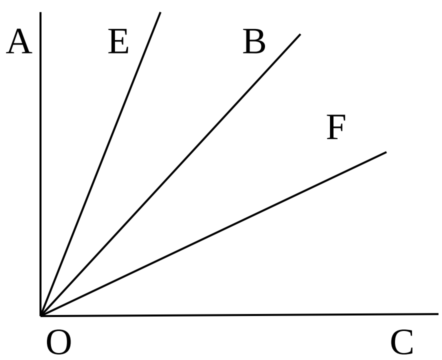
$$m(\angle EOF) = m(\angle EOB) + m(\angle BOF) = \frac{x^o}{2} + \frac{180^o - x^o}{2} =$$

$$= \frac{x^o + 180^o - x^o}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^o, \text{ deci } m(\angle EOF) = 90^o$$

2. <AOB şi <BOC sunt adiacente şi complementare [OE – bisectoarea <AOB, [OF- bisectoarea < BOC.

Aflaţi m(<EOF)

Soluţie:



Notăm cu $m(\angle AOB) = x^o \Rightarrow m(\angle BOC) = 90^o - x^o$

$$m(\angle EOB) = \frac{x^o}{2}, \; m(\angle BOF) = \frac{90^o - x^o}{2}$$

$$m(\angle EOF) = m(\angle EOB) + m(\angle BOF) = \frac{x^o}{2} + \frac{90^o - x^o}{2} =$$

$$= \frac{x^o + 90^o - x^o}{2} = \frac{90^o}{2} = 45^o, \text{ deci } m(\angle EOF) = 45^o$$

3. Aflaţi măsura unui unghi, ştiind că măsura complementului său este de $\frac{1}{3}$ măsura suplimentului său.

Soluţie: Fie x^o măsura unghiului, atunci

$$90^o - x^o = \frac{1}{3}(180^o - x^o) \,|\cdot 3 \Rightarrow 3(90^o - x^o) = 180^o - x^o$$

$$270^o - 3x^o = 180^o - x^o$$

$270^o-180^o=3x^o-x^o$

$90^o=2x^o \Rightarrow x^o=45^o$

4. Raportul măsurilor a două unghiuri suplimentare este $\frac{1}{5}$. Aflaţi măsurile celor două unghiuri.

Soluţie: Fix x^o şi 180^o-x cele două unghiuri atunci

$$\frac{X}{180^o-x^o} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x^o = 180^o-x$$

$6x^o = 180^o$

$x = 180^o: 6$

$x = 30^o$

Unghiurile căutate au 30^o respective $180^o-30^o = 150^o$

5. Măsura unui unghi este cu 36^o mai mare decât măsura suplimentului său. Aflați măsura unghiului.

Soluţie : Fie x^o masura unghiului, atunci

$x^o = (180^o-x^o) + 36$

$x^o + x^o = 216$

$2x^o = 216$

$x^o = 216:2$

$x^o = 108$, iar suplimentul are

$180^o-108^o = 72^o$

6. Determinaţi două unghiuri suplimentare a căror diferenţă este de 90^o.

Soluţie: Fie x si 180^o-x unghiurile căutatate

Caz 1. $x > 90^o \Rightarrow x^o - (180^o-x^o) = 90^o$

$x^o-180^o+x^o = 90^o$

$2x^o = 270^o$

$x = 270^o:2$

$x = 135^o$, iar suplimentul este de $180^o-135^o= 45^o$

Caz 2. $x<90^o \Rightarrow (180^o-x^o)-x = 90^o$

$180^o-x^o-x^o= 90^o$

$180^o-90^o= 2x^o$

$90^o=2x^o \Rightarrow$

$x=45^o$, iar suplimentul este de $180^o-45^o= 135^o$

7.Determinați unghiurile pentru care raportul dintre suplimentul si complementul este un numar natural.

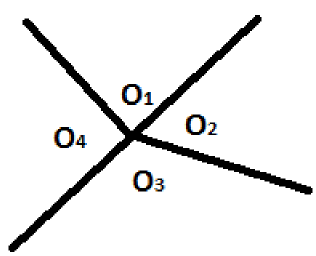
Soluție: Fie x unghiurile care au proprietatea din enunț.

$$\frac{180-x}{90-x}=k, k \in \mathrm{N}$$

$\frac{180-x}{90-x}=\frac{90-x}{90-x}+\frac{90}{90-x}=1+\frac{90}{90-x} \in \ N => 90-x\ este\ un\ divizor\ a\ lui\ 90$

=>90-x {1,2,3,5,6,9,10,15,18,30,45,90}
=>x ∈ {89,88,87,85,84,81,80,75,72,60,45,0}

7. Aflați măsurile a patru unghiuri formate în jurul unui punct, știind că acestia sunt direct proprționale cu numerele 3,4,5 și 6.



Fie m(∠O_1)=x, m (∠O_2)=y, m(∠O_3)=z, m(∠O_4)=t

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{t}{6}=k \Rightarrow \begin{aligned} x&=3k\\ y&=4k\\ z&=5k\\ t&=6k \end{aligned}$$

$x+y+z+t = 360^\circ$

$3k+4k+5k+6k = 360^\circ$

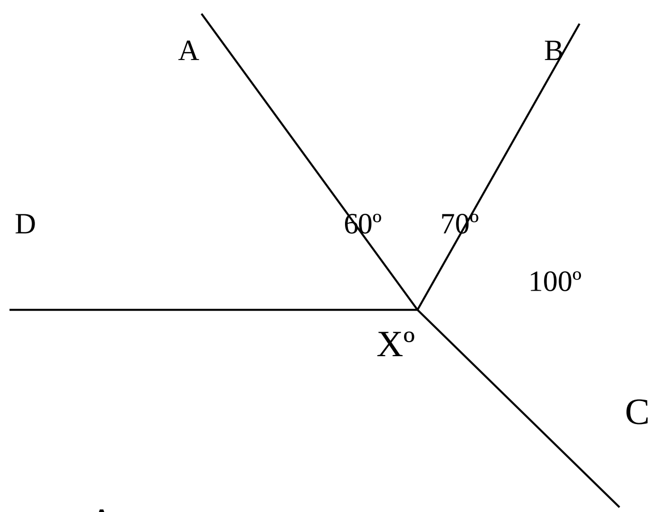
$18k = 360^\circ$ => $x = 60^\circ$

$k = 360^\circ:18$ $y = 80^\circ$

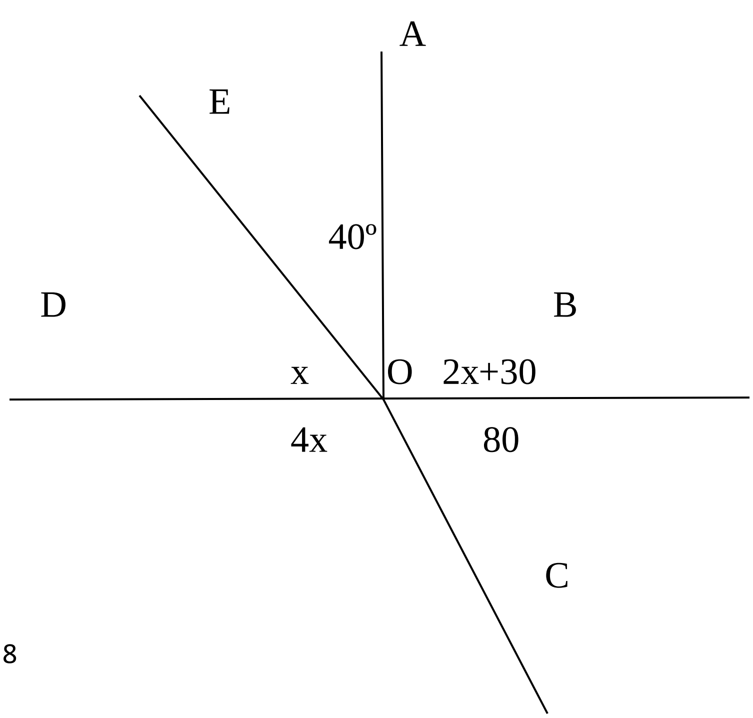
$k = 20$ $z = 100^\circ$

$t = 120^\circ$

9. Calculaţi măsurile unghiurilor necunoscute din figurile de mai jos :



A.



B.

Soluţie : a) $x + 60^\circ + 70^\circ + 100^\circ = 360^\circ$

$x = 360^\circ - 230^\circ$

$x = 130^\circ$

b) $x + 40^\circ + 2x + 30^\circ + 80^\circ + 4x = 360^\circ$

$7x + 150^\circ = 360^\circ$

$7x = 360-150^\circ$

$7x = 210^\circ$

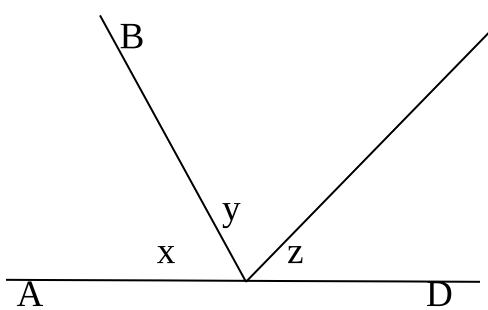
$x = 210^\circ : 7$

$x = 30^\circ$

n(<EOD) = 30º, m(<AOB) = 2·30º + 30º = 90º
n(<COD) = 4·30º = 120º

10. Suma a trei unghiuri <AOB, <BOC, <COD este de 180º, ştiind că măsurile unghiurilor sunt invers proporţionale cu nr.3,4,6. Aflaţi măsurile unghiurilor.

Fie



m(<AOB) = xº
m(<BOC) = yº
m(<COD) = zº

$x^\circ + y^\circ + z^\circ = 180^\circ$

$x \cdot 3 = y \cdot 4 = z \cdot 6 = k \Rightarrow x = \frac{k}{3}, y = \frac{k}{4}, z = \frac{k}{6}$

$\frac{^{4)}k}{3} + \frac{^{3)}k}{4} + \frac{^{2)}k}{6} = 180^\circ \Rightarrow \frac{9k}{12} = 180^\circ \Rightarrow k = \frac{\overset{20^\circ}{\cancel{180^\circ}} \cdot 12}{\cancel{9}} \Rightarrow$

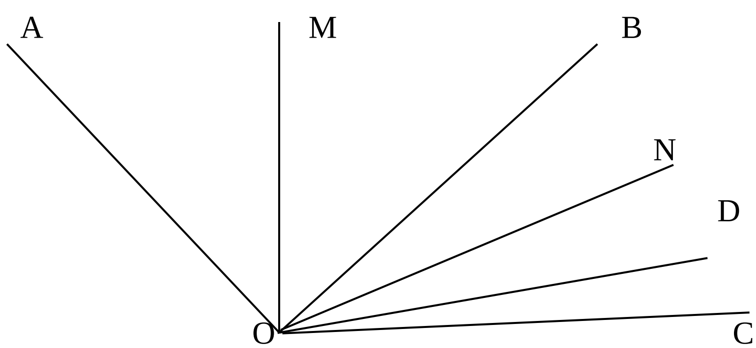
$\Rightarrow k = 240^\circ$

xº = 240º : 3 = 80º, yº = 240º:4 = 60º, zº = 240º : 6 = 40º

11. Se dau unghiurile adiacente <AOB şi <BOC aşa încât bisectoarele lor [OM, respectiv [ON formează un unghi cu măsura de 65º şi 3·m(<BOC) = 2·m(<AOB).

a) determinaţi măsurile unghiurilor <AOB şi <BOC;

b) dacă OD ⊥OM, M şi D situate de aceeaşi parte cu punctele B faţă de dreapta OA, determinaţi m(<COD).



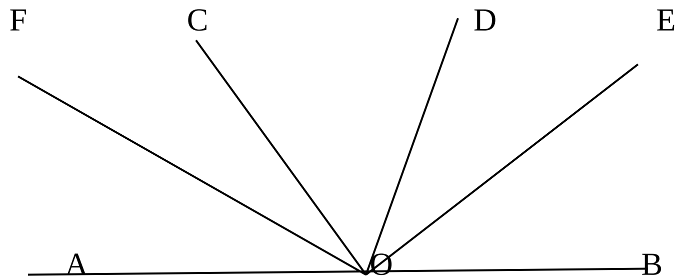
Soluţie:

a) $\frac{m(<AOB)}{2} + \frac{m(<BOC)}{2} = 65^{\circ}$ => m(<AOB) + m(<BOC) = 130º =>

=> m(<AOC) = 130º, => m(<AOB) = 130º - m(<BOC) => 3· m(<BOC) = 2 · (130º- m(<BOC)) => 5 ·m(<BOC) = 260º => m(<BOC) = 52º, m (<AOB) = 78º

b) m(<DOM) = m(<MON) + m(<NOD) => 90º = 65º + m(<NOD) => m(<NOD) = 25º, m(<NOC) = 26º => m(<COD) = 26º-25º = 1º

12. De aceeaşi parte a dreptei AB se duc semidreptele [OC şi [OD, astfel încât O ϵ (AB), şi (OD) inclus în interiorul (<COB), iar măsura (<COD) = 70º. Aflaţi măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor <AOC şi <BOD.



Soluţie: Fie [OF- bisectoarea <AOC şi [OE –bisectoarea <BOD

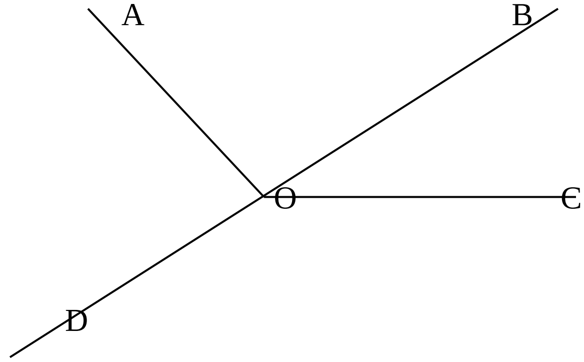
m(<AOC) m(<BOD)

m(<FOE) =m(<FOC)+ m(<COD) + m(<DOE)

$$= \frac{m(<AOC)}{2} + \frac{m(<BOD)}{2} + m(<COD)$$

$$= \frac{180^\circ - m(<COD)}{2} + m(<COD) = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} + 70^\circ = 55^\circ + 70^\circ = 125^\circ$$

13. Fie unghiurile <AOB şi <BOC astfel încât m(<AOB) este de 4 ori mai mare decât m(<BOC). Dacă m(<AOC) = 120º şi [OD este semidreaptă opusă semidreptei [OB, calculaţi m(<AOD).



Soluţie:

$m(<AOC) = m(<AOB) + m(<BOC) \Rightarrow 120^{o} = 4\cdot m(<BOC) + m(<BOC)$

$120^{o} = 5\cdot m(<BOC) \Rightarrow m(<BOC) = 24^{o}$

$m(<AOB) = 4\cdot 24^{o} = 96^{o}$, $m(<AOD) = 180^{o} - 96^{o} = 84^{o}$

14. Aflaţi măsura unui unghi, stiind că măsura complementului unghiului reprezintă 20% din măsura suplimentului său.

Soluţie :

$$90^{o} - x^{o} = \frac{\overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{100}}} (180^{o}-x^{o}) / \cdot 5 \Rightarrow 5(90^{o}-x^{o}) = 180^{o}-x^{o}$$

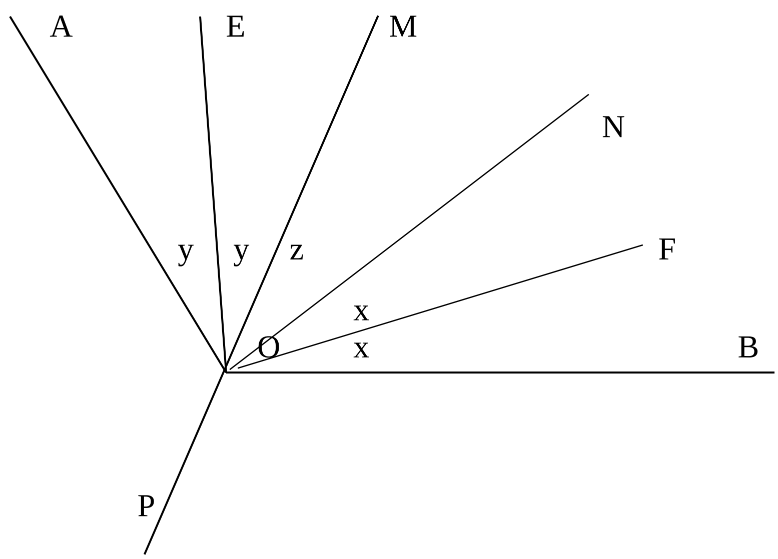
$450^{o}-5x^{o} = 180^{o}-x^{o} \Rightarrow 450^{o}-180^{o} =5x^{o}-x^{o} \Rightarrow 370^{o} = 4x^{o}$

$x = 368^{o}120' : 4 = 92^{o}30' \Rightarrow x^{o} = 93^{o}30'$

15. Fie <AOB un unghi cu măsura de 120º, M şi N : în interiorul său astfel încât M se aflǎ în interiorul unghiului <AON, iar bisectoarele unghiurilor <AOM şi <BON sunt perpendiculare.

a. determinaţi măsura unghiului <MON

b. dacă P este un punct astfel încât O ϵ (MP), arătaţi că <BOP ≡ <AON



Soluţii:

a) Cu notaţiile din figură avem:

$2x^{o}+2y^{o}+z=120^{o} \Rightarrow x^{o}+y^{o}+z^{o} = 90^{o} \Rightarrow 2x^{o}+2y^{o}+z^{o}-x^{o}-y^{o}-z^{o}=120^{o}-90^{o}$

$x^{o}+y^{o} = 30^{o}$

$30^{o}+z^{o}=90^{o} \Rightarrow z^{o}=60^{o} \Rightarrow m<MON = 60^{o}$

b) $m(<AOM) = 2y^\circ+z^\circ=2y^\circ+60^\circ$
$m(<BOP) = 180^\circ-(2x^\circ+z)= 180^\circ-(120^\circ-2y^\circ)=60^\circ+2y^\circ \Rightarrow <AON\equiv<BOP$

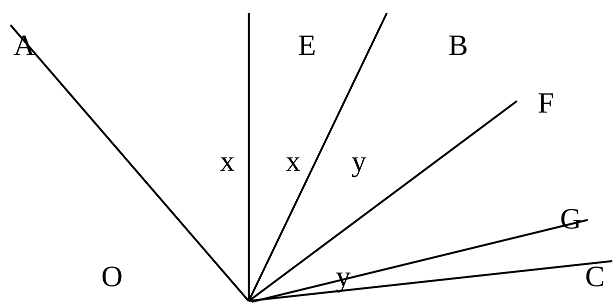
16. Se consideră unghiurile adiacente <AOB şi <BOC, astfel încât bisectoarele lor [OE şi [OF să formeze un unghi de 75º.

a) determinaţi m(<AOB) şi m(<BOC), ştiind că 3·m(<BOC) = 2·m(AOB).

b) dacă semidreapta [OG formează un unghi drept cu semidreapta [OE astfel încât G şi E sunt de aceeaşi parte a dreptei OA ca şi B arătaţi că [OG este bisectoarea <COF.

E.L.Alba 2013

Soluţia:



Fie $m(<AOE)=m(<EOB)=x$
$m(BOF)=m(<FOX))=y$
$x+y=75^\circ \Rightarrow y=75^\circ-x \Rightarrow 3\cdot 2y=2\cdot 2x \Rightarrow 3(75^\circ-x)=2x \Rightarrow 225=3x^\circ+2x^\circ$
$5x^\circ=225^\circ \Rightarrow x=45^\circ$ şi $y= 75^\circ-45^\circ=30^\circ \Rightarrow m(<AOB) = 2\cdot 45^\circ=90^\circ$,
$m(<BOC) =2\cdot 30^\circ=60^\circ$
b. $m(<EOG)=m(<EOB)+m(<BOF)+m(<FOG)$
$90^\circ=45^\circ+30^\circ+m(<FOG) \Rightarrow m(<FOG)=15^\circ$
$M(<GOC)= m(FOC)-m(<FOG)=30^\circ-15^\circ=15^\circ$
⇨ [OG este bisectoarea <COF

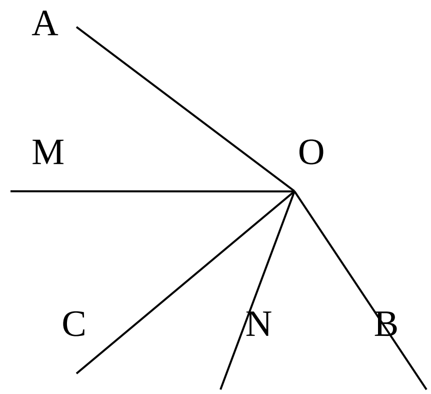
17. Fie unghiurile neadiacente <AOC şi <AOB astfel încât $\frac{m\angle AOB}{m\angle AOC} = \frac{3}{2}$

Se ştie că măsura unghiului format de bisectoarea lor este de 30º.

a) Determinaţi măsurile celor două unghiuri;

b) Arătaţi că [OA şi [OB sunt semidrepte opuse

Nicolae Bivol



Soluţie:

$$\frac{m(\angle AOB)}{3} = \frac{m(\angle AOC)}{2} = k \Rightarrow m(\angle AOB) = 3k,\ m(AOC) = 2k$$

=> [OC ⊂ int (<AOB)

Fie [OM – bisectoarea <AOC) => $m(\angle AOM) = m(\angle MOC) = \frac{2k}{2} = k$ şi

[ON – bisectoarea <AOB => $m(\angle AON) = m(\angle NOB) = \frac{3k}{2}$ · $m(\angle MON) =$

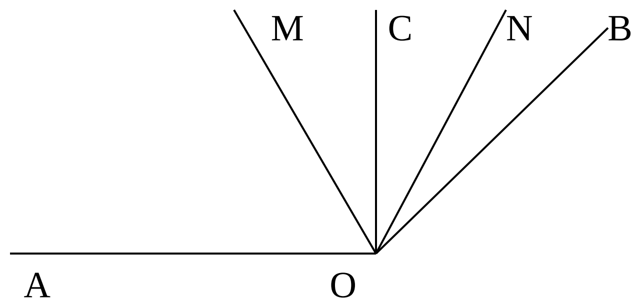
$$\frac{3k}{2} - k = \frac{k}{2} = 30^\circ \Rightarrow k = 60^\circ$$

$m(\angle AOC) = 2k = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$, $m(\angle AOB) = 3k = 3\cdot 60^\circ = 180^\circ$

b. $m(AOB) = 180^\circ$ => [OA şi [OB sunt semidrepte opuse

18. Două unghiuri suplementare au o latură comună, iar bisectoarele lor formează un unghi cu măsura de 60º. Determinaţi măsurile unghiurilor.

G.M.10/2013



Soluţie:

Dacă unghiurile sunt adiacente, atunci bisectoarele lor sunt perpendiculare => că unghiurile nu sunt adiacente.

Fie m(<AOB) = 2x şi m(<BOC) = 2y cu x > y, atunci 2x+2y = 180º =>

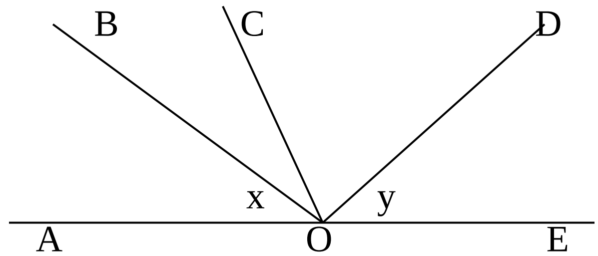
=> x+y = 90º şi x-y = 60º => 2x+y-y=150º => 2x=150º

x = 75º şi 2y = 30º => y = 15º

Deci m(<AOB)= 150º şi m(<BOC) = 30º

19. Unghiurile <AOB şi <BOE sunt adiacente suplimentare C, D ϵ int (BOE), DϵInt (<COE).

Dacă unghiurile <AOB, <BOC şi <DOE sunt ascuţite, cu măsurile exprimate prin numere naturale şi $m(<AOB)=\frac{2}{3} \cdot m(<BOC)= \frac{2}{15} \cdot m(<COD)$, aflaţi măsurile unghiurilor <AOB, <BOC, <COD şi <DOE.



Soluţie:

Notăm $m(<AOB) = x$, $m(<EOD) = y \Rightarrow m(<BOC) = \frac{3x}{2}$, $m(<COD)=\frac{15x}{2}$

Din $x + \frac{3x}{2} + \frac{15x}{2} + y = 180^\circ \Rightarrow 10x + y = 180^\circ \Rightarrow y = 180^\circ - 10x$, $m(<COD)<90^\circ$

$\Rightarrow \frac{15x}{2} < 90^\circ \Rightarrow x<12^\circ$ (1) , $m(DOE)<90^\circ \Rightarrow 180^\circ-10x < 90^\circ \Rightarrow x>9^\circ$ (2)

Din (1) şi (2) => $x \in \{10^\circ, 11\}$

Dacă $x=10^\circ \Rightarrow m(<AOB) = 10^\circ$, $m(<BOC) =15^\circ$, $m(<COD)= 75^\circ$, $m(<DOE)= 80^\circ$.

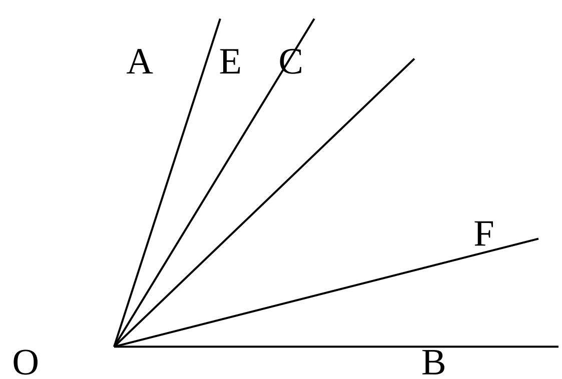
Dacă $x=11 \Rightarrow m(AOB) = 11^\circ$, $m(BOC) = 16^\circ30^\circ$, care nu este numar natural.

20. Două unghiuri complementare au o latură comună şi bisectoarele lor determină un unghi de 25º. Se acceptă că una din laturile celor două unghiuri aparţine interiorului unghiului format de cele două bisectoare.

a. Demonstraţi că cele două unghiuri nu pot fi adiacente;

b. Determinaţi măsurile celor două unghiuri.

O.L.ALBA 2015



Soluţie:

a. Dacă unghiurile sunt adiacente, atunci m(<EOF) = 45º. Contradicţie cu ipoteza => unghiurile nu pot fi adiacente.

b. $x - y = 25^\circ$, $2x + 2y = 90^\circ \Rightarrow x + y = 45^\circ \Rightarrow 2x + y - y = 70^\circ \Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 35^\circ$, $35^\circ + y = 45^\circ \Rightarrow y = 10^\circ$

Am notat cu $x = \dfrac{m(\sphericalangle AOB)}{2}$ şi $y = \dfrac{m(\sphericalangle BOC)}{2}$ => m(<AOB) = 70º şi m(<BOC) = 20º

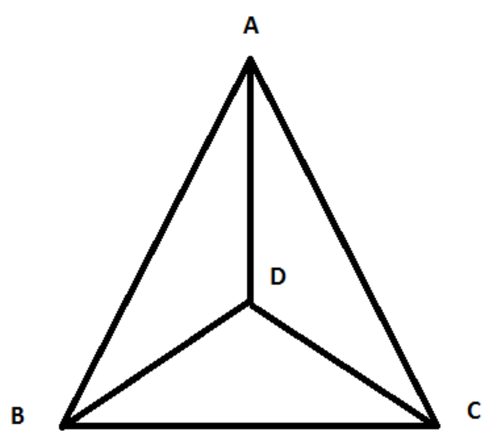
“Mai bine să nu înțelegi nimic, decât să înțelegi ceva greșit”

Didactica

TRIUNGHIURI

1. Se consideră ΔABC isocel cu [AB] ≡ [AC] şi D ϵInt ΔABC cu proprietatea că <DBA≡<DCA.

Arătaţi că [AD este bisectoarea <BAC.



Soluţie:

<ABC ≡<ACB (ΔABC- isoscel) => m(<DBC)=m(<ABC)-m(<ABD)=> =>m(<DCB)=m(<ACB) – m(<DCA) => <DBC ≡<DCB => ΔDBC isoscel =>[DB]≡[DC].

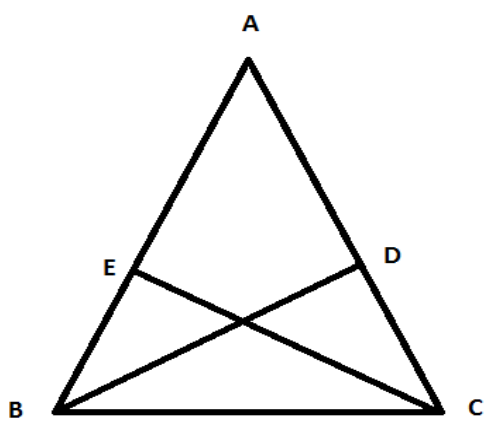
Din [AB]≡[AC]
[AD]≡[AD] =>(L.L.L) ΔABD≡ΔACD => <BAD≡<CAD=>[AD-bisectoarea <BAC
DB]≡[DC]

2. Fie un triunghi isoscel ΔABC cu baza [BC]. Bisectoarele unghiurilor <B şi <C intersectează laturile [AC] şi [AB] în D, respective E.

Demonstraţi că:

a. [BE]≡[CD]

b. ΔADE este isoscel.



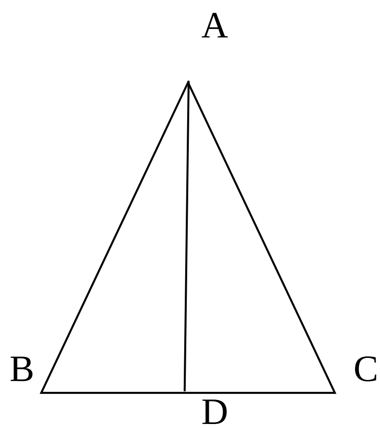
Soluţie:

a. Din [BC]≡[BC] (latură comună) <DBC≡<ECB cu jumătăţi de unghiuri congruente , <DCB≡<EBC

=>(U.L.U.) ΔEBC ≡ ΔDCB => [EB]≡[CD]

b. AE = AB-BE=AC-CD=AD => [AE]≡[AD] => ΔAED – isoscel

3. In triunghiul isoscel ΔABC, [AB]≡[AC]. Dacă perimetrul triunghiului ΔABC este de 64 cm, iar perimetrul triunghiului ADC este de 40cm, aflați lungimea înălțimii [AD].



Soluţie:

AD – înălţime => AD mediană => [BD]≡[DC]

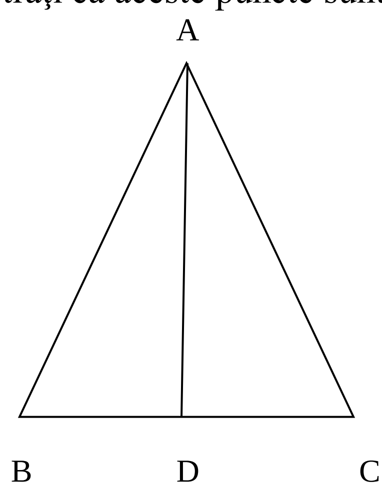
$P_{\Delta ABC}$ = AB+AC+BC = 2AB+2DC = 2(AC+DC) = 64 =>AC+DC = 64 : 2 = 32 cm

$P_{\Delta ADC}$ = AD+AC+DC

40 = AD +32 => AD = 40 – 32 =8 cm

AD = 8 cm

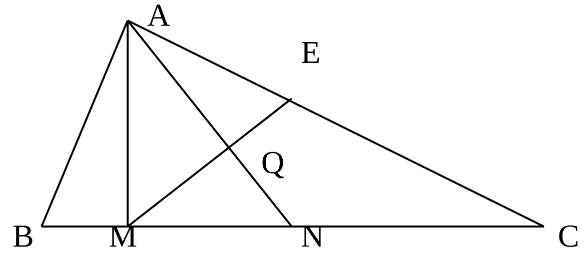
4. In triunghiul isoscel ΔABC, [AB ≡ [AC]. Se notează cu O,I,H, respectiv G punctele de intersecţie ale mediatoarelor, bisectoarelor, înălţimilor, respectiv, medianelor triunghiului. Demonstraţi că aceste puncte sunt coliniere.



Soluţie:

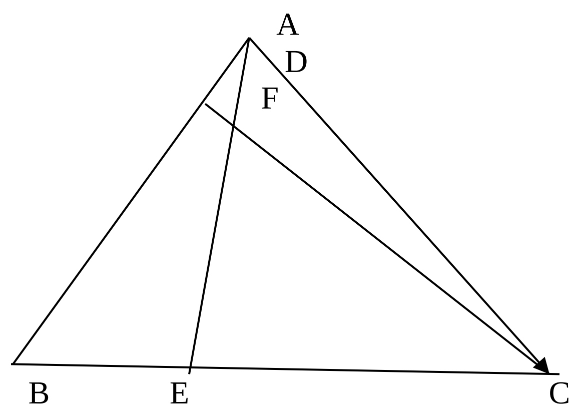
Intr-un triunghi isoscel bisectoarea [AD corespunzatoare bazei este mediană, mediatoare şi înălţime => O, I, H respectiv G sunt coliniare.

5,In ΔDABC, AM ⊥ BC, M∈(BC), ME⊥AC, E∈(AC), [AN –bisectoarea <MAC, M∈(BC), AM ∩ ME = {Q}. Demonstraţi că ΔMNQ este isoscel.



Soluţie:
<QAE≡<QAM ([AN – bisectoarea <MAC)=> <AQE≡<ANM) au complemente egale.
<AQE≡ <MQN (op.vârf) => <MQN≡ <MNQ=>ΔMNQ este isoscel.

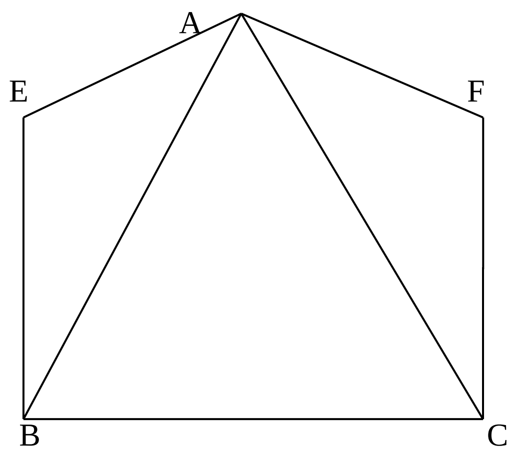
6.Se considera triunghiul echilateal ΔABC, D∈(AB) Şi E∈>(BC), m(<BAE) = m (<ACD) = 20º, AE ∩ CD = {F}.
Calculaţi m(<ADF).



Soluţie:
m(<CAE)=60º-20º= 40º

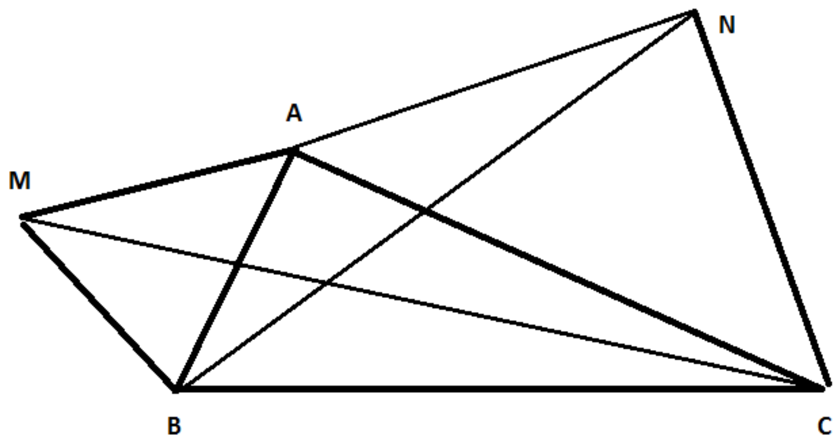
m(<EFC)=20+40=60º unghi exterior ΔAFC => m(<ADF)= 180º - (60º+20º)=100º

7.In triunghiul isoscel ΔABC, [AB]≡AC. Dacă E este intersectia perpendicularei în A pe AC cu perpendiculara în B pe BC şi F este intersecţia perpendicularei în A pe AB cu perpendicular în C pe BC.
Demonstraţi că [BE]≡[CF]



Soluţie:
m(<EAB)=90º-m(<BAC) și m(<FAC)=90º- m(<BAC)=> <EAB≡<FAC
Din <ABC≡<ACB =>
m(<EBA)=90º-m(<ABC) și m(<FCA) = 90º- m(<ACB) => <EBA≡ <FCA, [AB]≡[AC]=>
=> ΔABE≡ΔACF (U.L.U) => [BE]≡[CF]

8. In exteriorul triunghiului ABC construim triunghiurile echilaterale ABM şi ACN. Demonstraţi că [CM]≡[BN]



Soluţie:

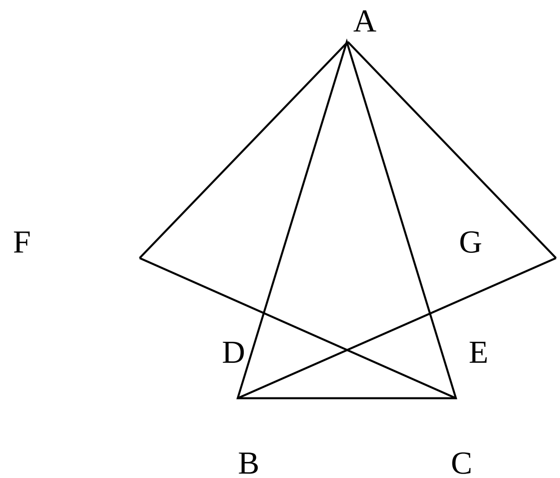
m(<BAN)=m(<BAC)+m(<CAN)=m(<BAC)+60º și

m(MAC)=m(<MAB)+m(<BAC)=m(BAC)+60º=>

<MAC≡<BAN
[MA]≡[AB]
[AC]≡[AN]

} (L.U.L.) ⟹ ΔBAN≡ΔMAC => [CM]≡[BM]

9 . In triunghiul isoscel ABC [AB]≡[AC], D϶(AB) şi E϶(AC) astfel încat [BD]≡[CE]. Dacă punctele F϶(CD şi G϶(BE), astfel încât CF=2CD şi BG=2BE. Demonstraţi că [AF]≡[AG].



Soluţii:

AD=AB-BD
AE=AC-EC
} =>[AD]≡[AE]

[BD]≡[CE]
[BC]≡[BC]
<DBC≡<ECB
} => L.U.L

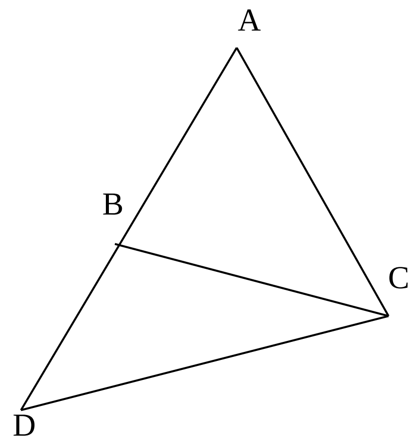
=>ΔDBC≡ΔECB => [DC]≡[BE] și
<BDC≡<BCE

FD=FC-DC=2DC-DC=DC
GE=BG-BE=2BG-BE=BE
=> [FD]≡[GE]

<FDA≡<BDC (op.vârf)
<AEG≡<BEC (op.vârf)
=><FDA≡<AEG

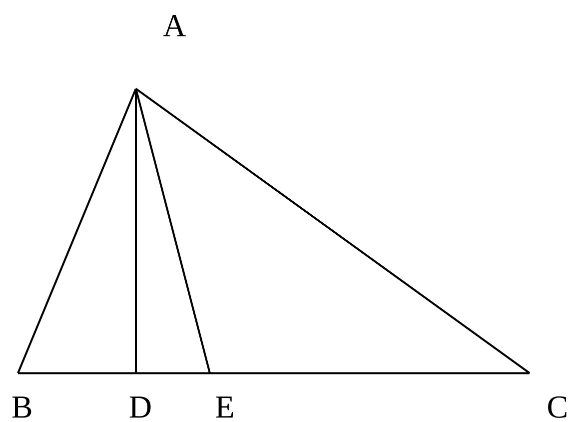
⇨ ΔADF≡AEG (L.U.L.) => [AF]≡[AG]

10. Pe latura [AB] a triunghiului echilateralABC se ia D∈(AB astfel încât [AB]≡[BD]. Demonstraţi că DC⊥AC



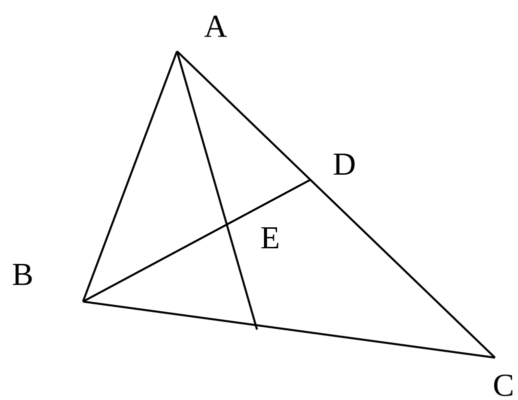
Soluţie:
ΔDBC – isoscel
m(<DBC)=180º-60º=120º => m(<BDC)=m(<BCD)=(180º-120º):2=30º=>
⇨ m(<ACD)=60º+30º=90º => AC⊥DC

11. In triunghiul ABC cu m(<B)=70º şi m(<C)=30º construim AD⊥BC, [AE –bisectoarea unghiului A cu D, E ∈ (BC). Arataţi că punctul D este mijlocul segmentului BE.



Soluţie:
m(<A)=180º-(70º+30º) = 80º
[AE – bisectoarea <A => m(<BAE)= m(<CAE) = 80º:2= 40º =>
⇨ m(<AEB)=m(<C)+m(<EAC)=30º+40º=70º (unghi exterior ΔAEC) =>
⇨ m(<B)=m(<AEB)=70º => ΔABE isoscel
iar AD⊥BE este înălţime în ΔABE =>AD este mediană => [BD]≡[DE]
⇨ D ete mijlocul lui [BE]

12. In triunghiul ABC, m(<A)=40º. Perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului A intersectează latura AC în D. Calculaţi m(<BDC).

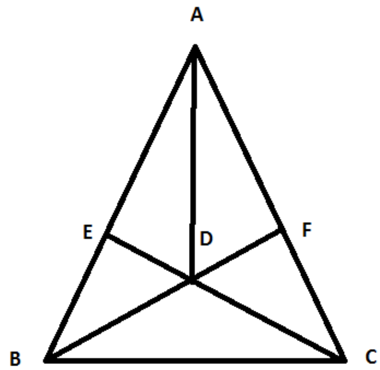


Soluție:

Notăm cu E intersecţia bisectoarei <A cu BD, In triunghiul ABD, AE este bisectoare şi este înalțime=> ΔABD- isoscel=>

m(<ABD)=(180-40):2=70=>m(<BDC)=180-70=110

13. In triunghiul isoscel ABC [AB]≡[AC], E∈(AB, F∈(AC), BF ∩ CE = {D}, [AE]≡[AF]. Demonstraţi că AD⊥BC.

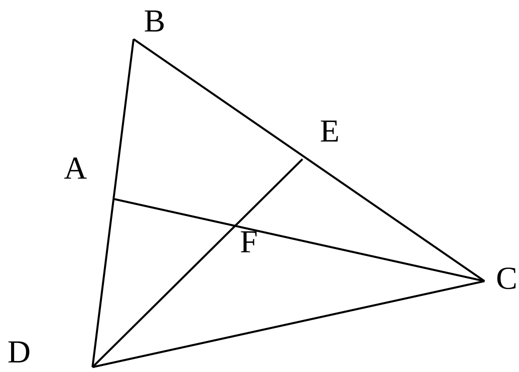


Soluţie:
BE=AB-AE=-AC-AF=CF => [BE]≡[CF]
<EBC≡<FCB (L.U.L.)
[BC]≡[BC] => ΔEBC≡ΔFCB => <DBC≡<DCB => ΔDBC – isoscel

[DB]≡[DC]
[AB]≡[AC]
[AD]≡[AD] (latură comună)
} L.L.L => ΔABD≡ΔACD => <BAD≡Δ<CAD

AD este bisectoare în ΔABC=>AD⊥BC

14. In triunghiul dreptunghiular ABC, mediatoarea ipotenuzei [BC] intersectează (BA în punctul D, astfel încât A ϵ (BD) şi latura (AC) în F. Demonstraţi că BF⊥CD.



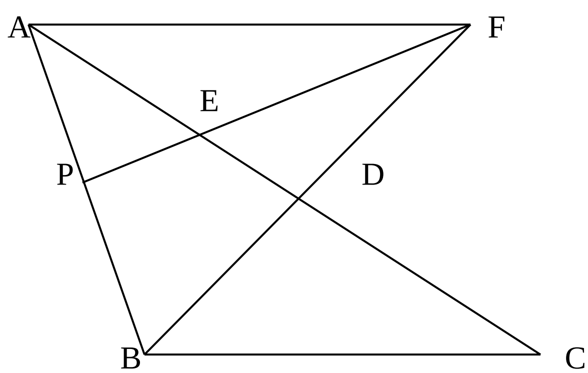
Soluţie:

In ΔBCD, CA⊥BD, DE⊥BC, DE ∩ AC = {F} este ortocentruol triunghiului =>BF⊥DE

15. In ΔABC, D este mijlocul lui (AC) şi E ϵ (AC) astfel încât CE =2AE, F este simetricul lui B faţă de D, FE ∩ AB = {P}. Demonstraţi că:

a. AF || BC

B. [AP]≡[PB]



Soluţie:

a.[AD]≡[DC] } (L.U.L.) => ΔADF≡ΔCDB=><CBD≡<DFA (alt.int)=> AF||BC

[BD]≡[DF]

<ADF≡<BDC (Op.vârf)

b. D mijlocul lui [BF] => AD mediană în ΔABF, CE = 2·AE, AE+ EC = AC => AE +2AE =AC

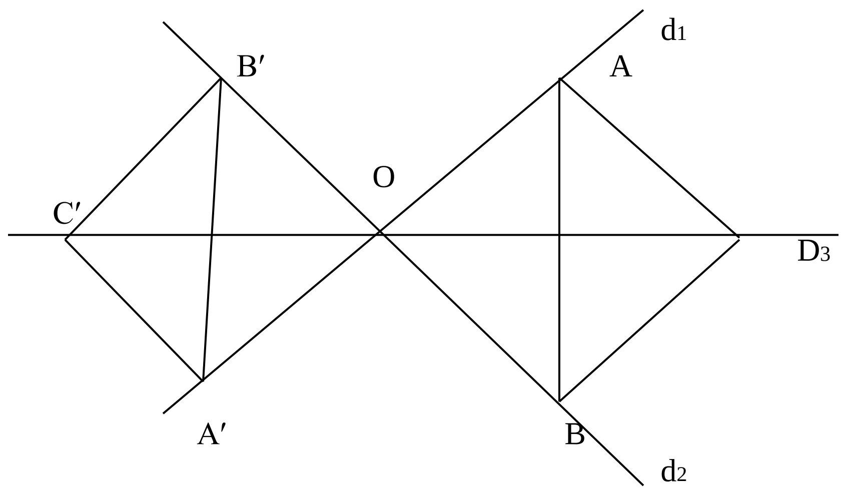
⇨ 3AE=AC=>AE=$\frac{AC}{3}$

$$ED = AD - AE = \frac{AC}{2} - \frac{AC}{3} = \frac{AC}{6} = \frac{3AE}{6} = \frac{AE}{2}$$

- ⇨ AE = 2ED, E aparţine medianei (AD), în ΔABF =>E este central de greutate al ΔABF => FP este mediană => [AP]≡[PB]

16. Se dau dreptele concurente $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$, A, $A' \in d_1$; B, $B' \in d_2$; C, $C' \in d_3$, astfel încât [OA]≡[OA′], [OB]≡[OB′], [OC≡[OC′].

Demonstraţi ca dacă A,B, C nu pot fi coliniare atunci nici A′,B′,C′ nu sunt coliniare, iat ΔABC≡ΔA′B′C′.



Soluţie:

[AO]≡[A′O], [BO]≡[B′O], <AOB≡<A′OB′ => (L.U.L.)

ΔAOB≡ΔA′OB′ => OAB≡OA′B′

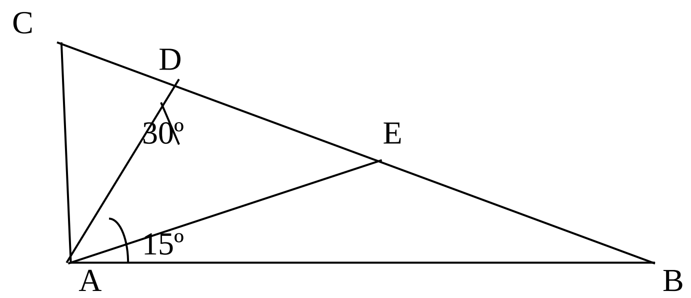
[AO]≡[A′O], [CO]≡[C′O], <AOC≡A′OC′=> (L.U.L.)

ΔAOC≡ΔA′OC′ => <OA′C′≡<OAC

Dar <OAB≢<OAC deoarece A,B şi C nu sunt coliniare => <OA′B′≢ <OA′C′ => A′,B′ şi C′ nu sunt coliniare.

Din ΔA′OB′≡ΔAOB, ΔA′OC′≡ΔAOC şi ΔB′OC′≡ΔBOC => [A′B′]≡[AB], [A′C′] ≡AC respectiv [B′C′]≡[BC] =>ΔA′B′C′≡ΔABC (L.U.L.)

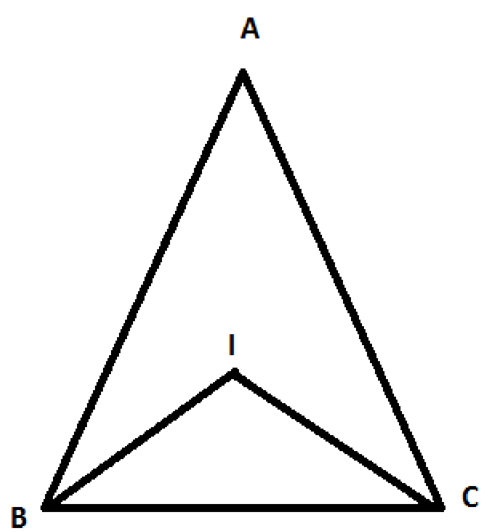
17. In triunghiul dreptunghic ABC, m(<A)=90º, m(<B) =15º, AD⊥BC, D∈(BC). Demonstraţică BC =4AD



Soluţie:
Construim mediana AE, E∈(BC)=> ΔAEB şi ΔAEC – isoscel, m(<EAB)=<B=15º
m(<AEC)=30º - unghi exteriortriunghiului AEB =>

=>AD= $\frac{AE}{2} = \frac{BC}{4}$ => BC = 4AD (AD cateta opusa unghiului de 30º.

18. Dacă într-un triunghi isoscel bisectoarele unghiurilor <B şi <C de la bază formează un unghi <BIC de două ori mai mare decât unghiul <A atunci triunghiul este echilateral.



Soluţie”:º

Fie [BI şi [CI – bisectoarele unghiurilor B şi C, notăm $\angle ABI)=x^\circ$, $m(\angle A)=180^\circ-4x^\circ$

$m(\angle BIC)=180^\circ-2x^\circ=2\cdot m(\angle A) \Rightarrow 180^\circ-2x^\circ=2\cdot(180^\circ-4x^\circ)$

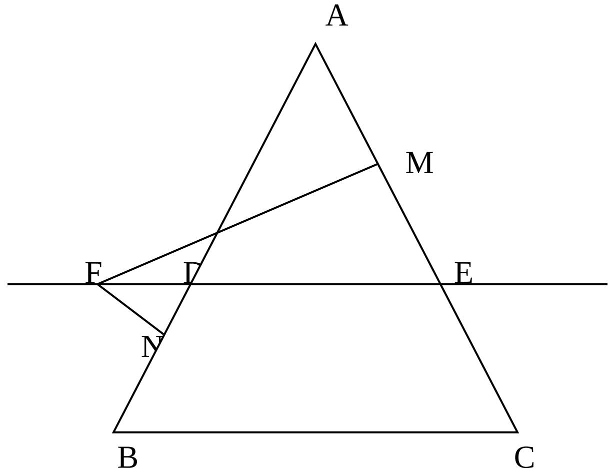
$180^\circ-2x^\circ=360^\circ-8x^\circ$

$6x^\circ=360^\circ-180^\circ$

$x=30^\circ$

⇨ $m(\angle ABC)=60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ – este echilateral (triunghi isoscel cu un unghi de 60º).

19. In triunghiul isoscel ABC, [AB]≡[AC], D∊(AB), E∊(AC) astfel încat DE ∥ BC. In exteriorul triunghiului pe dreapta DE se consideră punctual F. Din F construim FM⊥AC şi FN⊥AB. Demonstraţi că (FE este bisectoarea ∠MFN.



Soluţie:

DE∥BC

$\angle B\equiv\angle C$

$\angle C\equiv\angle AED$ (corep)

$\angle B\equiv\angle ADE$ (corep)

$\angle ADE\equiv\angle FDN$ (op vârf)

$\Rightarrow \angle FDN\equiv\angle AED$

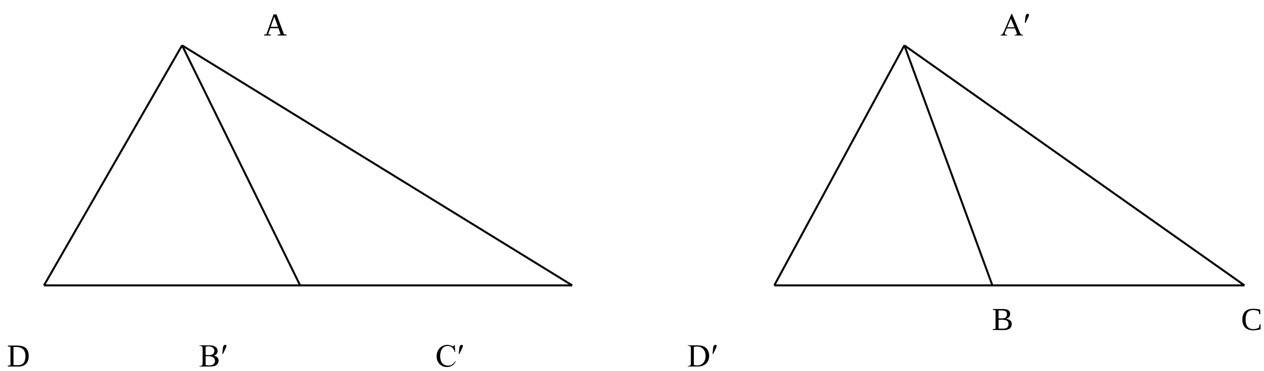
$m(\angle MFE)+m(AED)=90^\circ$

$\Rightarrow \angle MFE\equiv\angle NFD \Rightarrow$ [FE – bisectoarea ∠MFN

$m(NFD)+m(\angle FDN)=90^\circ$

20. In ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ se dă $[AB]\equiv[A'B']$
$BC+CA=B'C'+C'A'$ şi $\angle B\equiv\angle B'$
Demnostraţi că $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$

O.M.etapa judeţeană Vâlcea,1990



Soluţie:

Prelungim BC cu $[CD]\equiv[AC]$, respectiv $B'C'$ cu $[C'D'\equiv[A'C']$ astfel încât $C\in(BD)$ şi $C'\in(B'D')$

$[AB]\equiv[A'B']$, $[BD]\equiv B'C']$ şi $\angle B\equiv\angle B' \Rightarrow \Delta ABD\equiv\Delta A'B'D'$ (L.U.L)$\Rightarrow \angle BAD\equiv\angle B'A'D'$

ΔACD – isoscel ($[CD]\equiv[AC]$)$\Rightarrow \angle D\equiv\angle CAD$

$\Delta A'C'D'$ – isoscel ($[C'D']\equiv[A'C']$)$\Rightarrow \angle D'\equiv\angle C'A'D'$

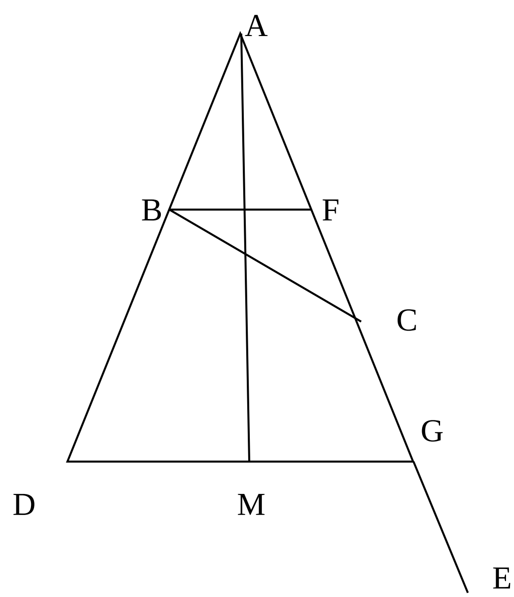
$m(\angle BAC)=m(\angle BAD)-m(\angle CAD)=m(\angle B'A'D')-m(\angle C'A'D')= m(\angle B'A'C')\Rightarrow$ (U.L.U)

$\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$

21. Fie triunghiul ABC, în care AB<AC. Fie D∈(AB), B∈(AD) şi E∈(AC), C∈(AE), astfel încat [BD]≡[CE]. Perpendicularele din B şi D pe bisectoarea unghiurilor <BAC intersectează dreapta AC în F şi respective G.

a. Demonstraţi că [FG]≡[CE]

O.L.Hunedoara 2013



Soluţie:

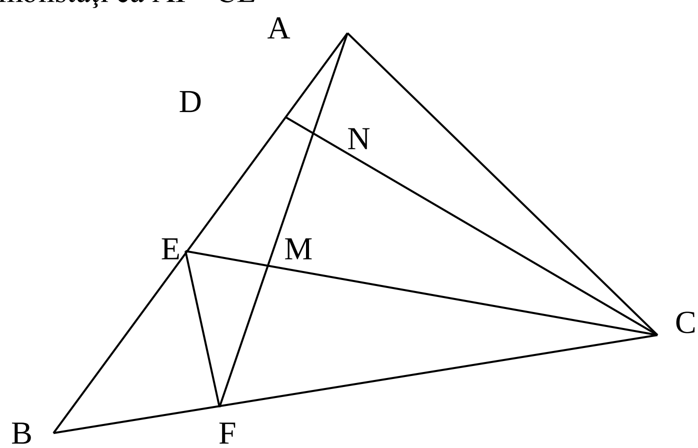
a. [AM – bisectoarea unghiului <BAC
AM⊥BF, AM⊥DG, M∈(DG)
=>ΔABF şi ΔADG – isosceles

b. [BD]≡[FG]≡[CE] deoarece
(BD=AD-AB=AG-AF=FG)

22. Fie ABC triunghiul isoscel cu [AB]≡[AC], şi m(<BAC)=72º. Pe latura AB se iau punctele D şi E, astfel încât <ACD≡<ECB≡<DCE, iar F϶(BC), astfel încât EF este bisectoarea <BEC.

a. Arătaţi că ΔAFB≡ΔCFE

b. Demonstaţi că AF┴CE

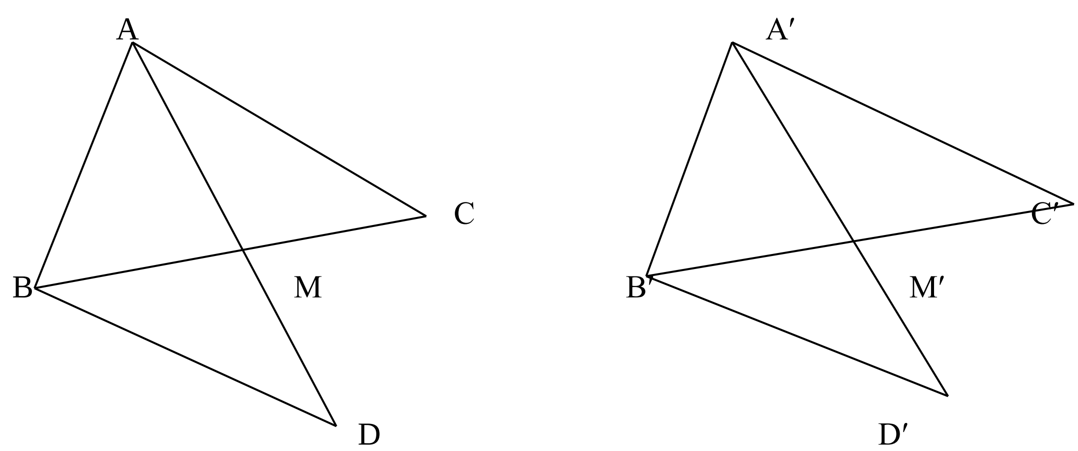


Soluţie:

a. ΔABC – isoscel => m(<ABC)=m(<ACB)= (180º-72º):2=108º:2=54º
m(<ACD)=m(<DCE)=m(<ECB)=54º:3=18º=> m(ACE)=36º, m(AEC)=180º-(72º+36º)=72º
=>ΔACE – isoscel => [AC]≡[CE]≡[AB]
m(<BEC)=180º-72º=108º=>m(<BEF)=m(<CEF)=108:2=54º=m(<ABC)
=>ΔFEB – isoscel => [FE]≡[FB]
Din [FE]≡[FB], [AB]≡[CE], <ABF≡<FEC =>(L.U.L.) ΔABF≡ΔCFE

b. m(<AEC)=72º, m(<BAF)=m(<ECF)=18º => m(<AME = 180º-(72º+18º)=90º=>
=>CE┴AF

23. Se dau triunghiurile ΔABC şi ΔA′B′C′, M şi M′ sunt mijloacele laturilor [BC] şi [B′C′]. Demonstaţi că dacă [AB]≡[A′B′], [AC]≡[A′C′] şi [AM]≡[A′M′], atunci ΔABC≡A′B′C′



Soluţie:

Fie D simetricul lui A faţă de M şi D′, simetricul lui A′ faţă de M′ =>[AM]≡[MD] şi

[A′M′] ≡ [M′D′]

[MB]≡[MC], [MA]≡[MD] şi <BMD≡<AMC (op.vârf) (L.U.L.) =>ΔMBD≡ΔMCA

=>

[BD]≡[AC] (1)

[M′B′]≡[M′C′], [M′A′]≡[M′D′] şi <B′M′D′≡<A′M′C′ (op.vârf) (L.U.L.)

=>ΔM′B′D′≡ΔM′C′A′ = >[B′D′]≡[A′C′] (2)

=> [BD]≡[B′D′] (Din (1) și (2))

AD=2AM, A′D′=2A′M′ => [AD]≡[A′D′] (deoarece [AM]≡[A′M′]) (L.U.L.)

ΔABD≡ΔA′B′D′ => [BM]≡[B′M′] (mediane corespunzătoare la laturi congruente în triunghiuri congruente)

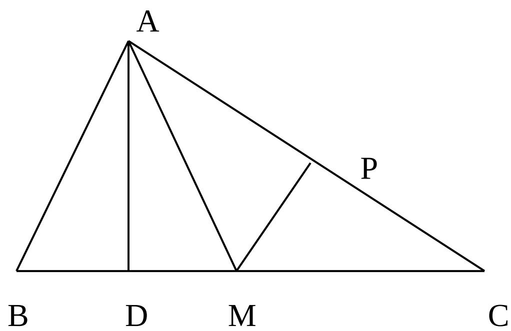
BC=2BM, B′C′=2B′M′=>[BC]≡[B′C′]

Din [AB]≡[A′B′], [BC]≡[B′C′] şi [CA]≡[C′A′] => (L.L.L)

ΔABC≡ΔA′B′C′

24. In triunghiul ABC se consideră AD⊥BC, D∈(BC), AM bisectoarea unghiului BAC, m∈(BC) şi MP⊥AC, P∈(AC). Dacă AD este bisectoarea unghiului BAM şi punctul P este mijlocul laturii (AC), calculaţi măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC.

Ion Cicu, Bucureşti



Soluţie:

[AD – bisectoarea <BAM, notăm m(<BAD)= m(<DAM)=a

[AM – bisectoarea <BAC, => m(<BAM)= m(<MAC)= 2a

In triunghiul AMC, MP este înălţime şi mediană => ΔAMC este isoscel => m(<ACM)=m(<MAC) = 2a

In triunghiul ABM, AD este înălţime şi mediană => ΔABM este isoscel, m(<ABM)=m(<AMB) = 4a

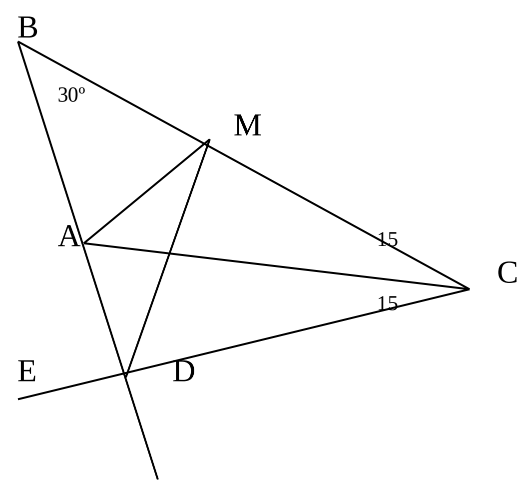
<AMB este unghi exterior ΔAMC, dar m(<ABC)+m(<BAC)+m(<ACB)=180º=>

=>4a + 4a+2a =180º => a=18º => m(<ABC)=m(<BAC)= 4·18=72º

m(<ACB)=2·18º=36º

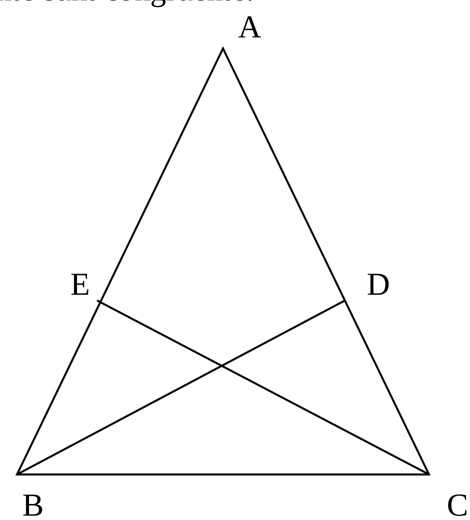
25. Se consideră triunghiul ABC, în care m(<ABC)=30º şi m(<ACB)=15º. Punctul M este mijlocul laturii [BC]. Determinaţi măsura unghiuluiAMB

O.L.Bucureşti 2013



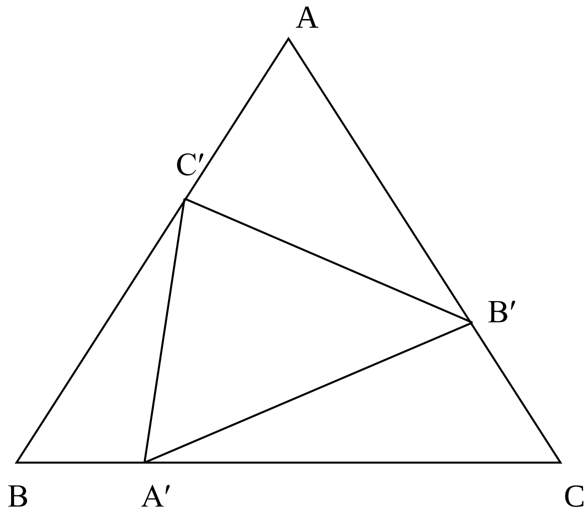
Soluţie:
Construim semidreapta [CD astfel încât [CD ∩ [BA={D} şi m(<ACD)=15º=> ΔDBC – isoscel cu m(<DBC)=m(<DCB)=30º => DM⊥BC (M mijlocul lui [BC]=>m(<CDM)=m(<BDM)=120º:2=60º=>m(<BDE)=180º-120º=60º
[CA – bisectoarea <BCD, [DA – bisectoarea exterioară în ΔMDC => [MA este bisectoare exterioară în ΔMDC => [MA bis <BMD=> m(<AMB)=90º:2=45º

26. Să se demonstreze că într-un triunghi isoscel medianele, înălţimile şi bisectoarele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.



Soluţie:
Fie [AB]≡[AC], BD⊥AC,CE⊥AB
[AB]≡[AC]~<A≡<A (unghi comun) IU => ΔABD≡ΔACE=>[BD]≡[CE]. La fel demonstrăm pentru mediane şi bisectoare.

27. In triunghiul echilateral ABC se consideră punctele A′ϵ(BC), C′ϵ(AB), B′ϵ(AC) astfel încât [BA]≡[CB′]≡[AC′]. Determinaţi că ΔA′B′C′ este echilateral.

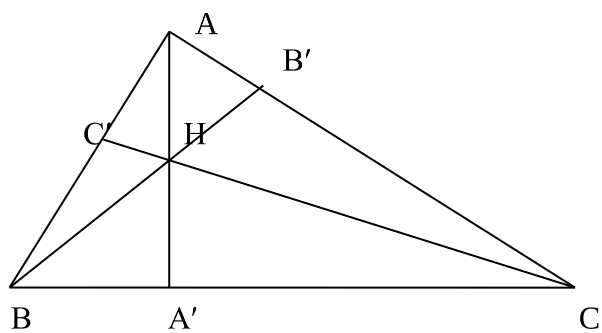


Soluţie:

Din [BA′A]≡[CB′]≡[AC′]=> [BC′]≡[AB′]≡[CA′] (ca diferenţă de segmente congruente) şi <A≡<B≡<C=>ΔAB′C′≡ΔBC′A′≡ΔCA′B′ (L.U.L.)=> [A′C′]≡[A′B′]≡[B′C′]=>

=> ΔA′B′C′ este echilateral.

28. Să se demonstreze căsuma înălţimilor unui triunghi este mai mică decât perimetru triunghiului:



Soluţie:

Deoarece într-un triunghi la unghiul mai mare se opune latura mai mare, avem,

pentru AA′⊥BC =>AA′<AB (1) , AA′<AC

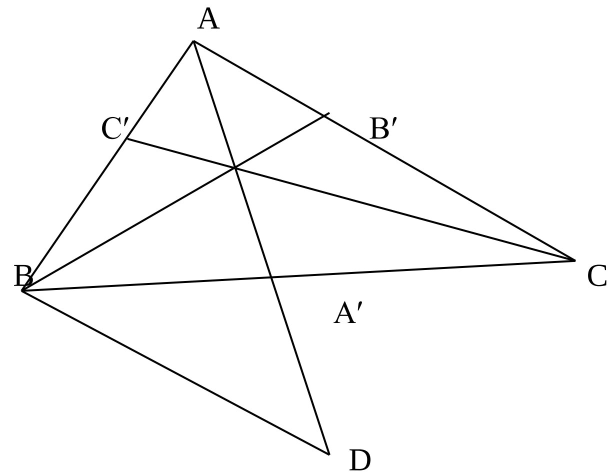
pentru BB′⊥AC => BB′<AB, BB′<BC (2)

pentru CC′⊥AC => CC′<BC, CC′<AC (3)

din (1), (2) şi (3) => AA′+BB′+CC′<AB+BC+AC

29. Să se demonstreze că în orice triunghi în care AA', BB' şi CC' sunt mediane cu $A'\in(BC)$, $B\in(AC)$, $C'\in(AB)$ avem:

$$\frac{AB+AC+BC}{2} < AA'+BB'+CC' < AB+AC+BC$$



Soluţie:

Fie D simetricul lui A faţă de A' => $[AA']\equiv[A'D']$, $[BA']\equiv[CA']$, $\sphericalangle BA'D\equiv\sphericalangle CA'A$ } (L.U.L)

$\Delta BA'D\equiv\Delta CA'A$ => $[BD]\equiv[AC]$ => $AD<AB+BD$ => $AD<AB+AC$ => $2AA'<AB+AC$ =>

$$AA' < \frac{AB+AC}{2}$$

La fel rezultă că $BB' < \frac{AB+BC}{2}$, $CC' < \frac{AC+BC}{2}$

Adunând cele trei relaţii avem

$$AA'+BB'+CC' < \frac{\cancel{2}^1 (AB+AC+BC)}{\cancel{2}_1} \Rightarrow AA'+BB'+CC' < AB+AC+BC$$

Pentru prima inegalitate avem:

$AB < AA'+A'B$

$AC < AA'+A'C$

=> $AB+AC<2AA'+BC$ => $AB+AC-BC<2AA'$

Luând şi relaţiile similar pentru celelalte două mediane avem:

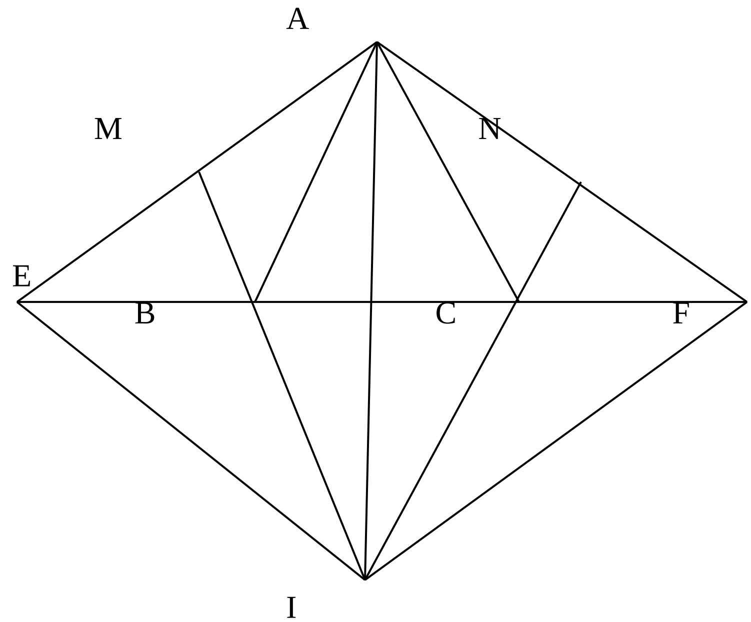
$BA+BC-AC<2BB'$

Adunând cele trei relaţii obţinem

CA+CB-BA<2CC′

$$\frac{AB+AC+BC}{2} < AA' + BB' + CC'$$

30. Se dă triunghiul ABC în care m(<ABC) <90º şi m(<ACB) <90º. E, F ϵ BC, astfel încât Bϵ(EC), Cϵ(BF), [BE]≡[BA] şi [CF]≡[CA]. Perpendiculara în B pe AE, intersectează perpendicular în C pe AF în {I}. Arătaţi că <BAI≡CAI



Soluţie:

Cobstruim BM┴AE, CN┴AF, [AB]≡[BE] şi[CA]≡[CF] =>BM este mediatoarea lui [AE]

[CN] este mediatoarea lui [AF] => [IE]≡[IA]≡[IF] =>

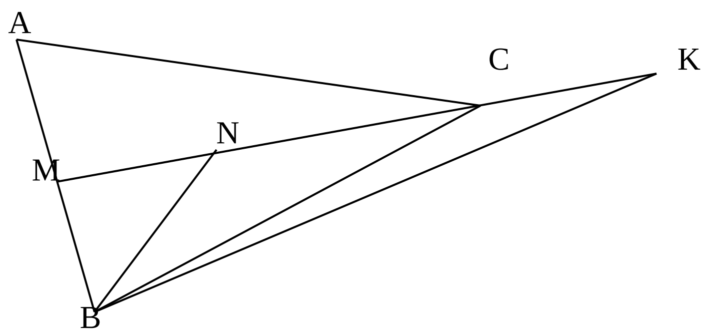
m(<IEA)=m(IAE)
=> m(<IEB)=m(IAB) ca diferenţă de unghiuri congruente,
m(<BEM)=m(BAM)

m(<IFA)=m(IAF)
=> m(<IFC)=m(IAC) ca diferenţă de unghiuri congruente, =>
m(<CFA)=m(CAF)

m(<IEB)=m(IFC) (deoarece ΔIEF este isoscel => m(<IAC)=m(IAB) => <IAB≡IAC

31. In triunghiul ABC, pe prelungirea medianei [CM], dincolo de vârful C, se consideră punctual K pentru care [CK]≡[AM]. Stiind că m(<BMC)=60º, arătaţi că]=[AC]≡[BK]

Olimpiadă Moscova 2016



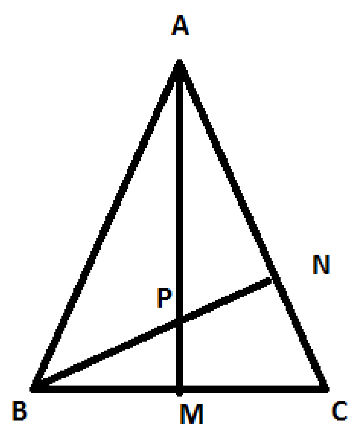
Soluţie:

Fie N∊(MC astfel încât [MN]≡[MB]=> ΔMNB este echilateral NK=NC+MN=MC m(<AMC)=m(<BNK)=180º-60º=120º => (L.U.L) ΔAMC≡ΔBNK => [AC]≡[BK]

32. Intr-un triunghi oarecare ABC, m(<A) este media aritmetică a măsurilor unghiurilor <B şi <C. Bisectoarea (AM a unghiului <A intersectează înălţimea BN, N∊(AC), în punctual P. Arătaţi că

$$AP=\frac{2}{3} BN.$$

Luca Tuţă



Soluţie:

Din 2·m(<A)=m(<B)+m(<C)=180º-m(<A) => 3·m(A)= 180º=>m(<A)=60º.

Atunci m(<PAN)=m(<PAB) =30º

m(<ABN)= 90º-60º=30º => ΔPAB este isoscel

PA = 2PN (1) (PN catetă opusă unghiului de 30º)

AB = 2AN (AN catetă opusă unghiului de 30º)

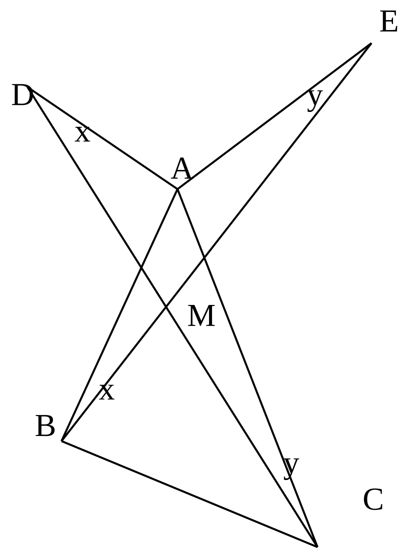
(Conform T bisectoarei) => $\frac{PB}{PN} = \frac{AB}{AN} = \frac{2\cancel{AN}}{\cancel{AN}} = 2$

PB=2PM

PB+PN=BN => 3PN=BN => $PN = \frac{BN}{3}$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) => $PA = \frac{2}{3}BN$

33. Fie ABC un triunghi oarecare. In exterior se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele ΔABD cu $[AB]\equiv[AD]$ şi ΔACE cu $[AC]\equiv[AE]$. Arătaţi că $CD\perp BE$



Solutie:

Din $[AD]\equiv[AB]$, $[AE]\equiv[AC]$

$\angle DAC\equiv\angle BAE$ (au măsurile egale cu $m(\angle BAC)+90^\circ$) => (L.U.L)

$\Delta DAC\equiv\Delta BAE$

⇨ $m(\angle ADC)=m(ABE)=x^\circ$

$m(\angle ACD)=m(AEB)=y^\circ$

Din ΔDAC => $x+y = 90^\circ-m(\angle BAC)$ (1)

Fie $DC \cap BE = \{M\}$, $m(\angle MBC)=m(\angle ABC)-x$, $m(\angle MCB)=m(\angle ACB)-y$.

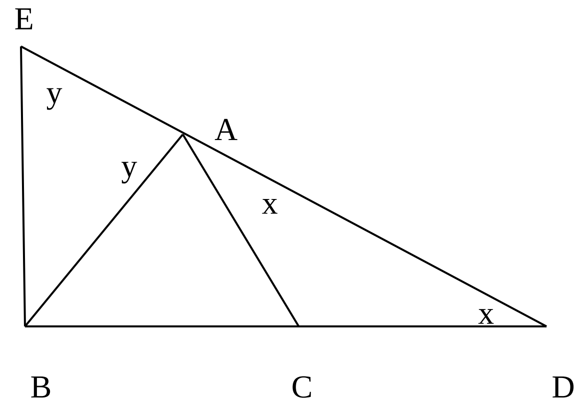
In ΔMBC avem $m(\angle MBC)\perp m(MCB)=m(\angle ABC)-x+m(\angle ACB)-y$

$= m(\angle ABC)+m(\angle ACB)-(x+y)= m(\angle ABC)+m(\angle ACB)-[90^\circ-m(\angle BAC)]= m(\angle ABC)+ m(\angle ACB)+m(\angle BAC)-90^\circ=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

Deci $m(\angle BMC)=90^\circ$=>$CD\perp BE$

34. Fie ABC un triunghi isoscel, cu [AB]≡[AC], D∊BC astfel încât C∊(BD) şi [DC]≡[AC], iar E un punct aflat de aceeaşi parte a dreptei BC ca şi A, astfel încât EB⊥BC şi [EB]≡[AB]. Stiind că punctele D, A şi E sunt colineare, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC.

Revista KöMal, Ungaria



Soluţie:

Din [CD]≡[AC] => ΔCAD –isoscel, notăm m(<CAD)= m(<CDA)=x^o

Din [AB]≡[EB] => ΔBAE –isoscel, notăm m(<BAE)= m(<BEA)=y^o

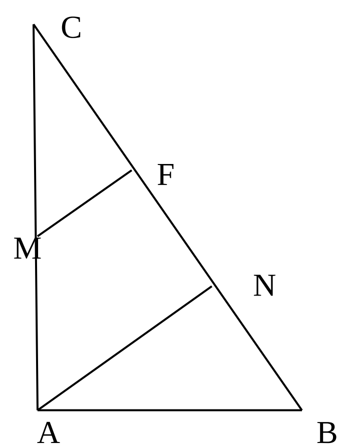
Dar $x^o+y^o=90^o$ => m(<BAC)=$180^o-90^o=90^o$

Din [BA]≡[AC] => ΔABC – dreptunghic isoscel=>m(<ABC)=m(<ACB)=45^o

34. Fie ABC un triunghi în carte m(<A)=90^o şi AC=2AB. Notăm cu M mijlocul segmentului

[AC] şi cu F punctul de pe segmental [BC] pentru care $\frac{FC}{FB} = \frac{2}{3}$. Arătați că MF ⊥ BC

Victor Felecan



Soluție

Notăm AB=x => AC=2x. Fie AN⊥BC, din teorema lui Pitagora => BC = $x\sqrt{5}$. Din teorema catetei => AB^2=BN·BC=>x^2=BN·$x\sqrt{5}$. => BN= $\frac{x\sqrt{5}}{5}$

$$AN^2=AB^2-BN^2=x^2-\frac{5x^2}{25}=\frac{20x^2}{25} \Rightarrow AM=\frac{2\sqrt{5}\,x}{5}$$

$$\text{Din } \frac{FC}{FB}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{FC}{BC}=\frac{2}{5} \Rightarrow FC=\frac{2\cdot x\sqrt{5}}{5} \Rightarrow [AM]\equiv[FC],\ [AB]\equiv[MC],$$

<NAB≡<MCF

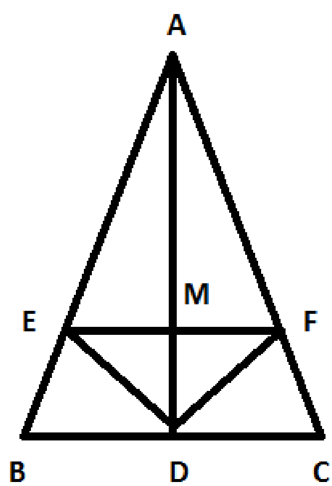
=>(L.U.L.) ΔABN≡ΔCMF=> MF ⊥BC

OBS. Din FN=BF-BN => CF=FN = $\frac{2x\sqrt{5}}{5}$ => MF este linie mijlocie în ΔCAN => MF⊥CN.

35. Bisectoarea unghiului BAC al triunghiului ABC intersectează latura BC în D. Se consideră punctele E∈(AB), F∈(AC), astfel încât [ED]≡[BD] şi [FD]≡[CD]. Arătaţi că dacă AD⊥EF, atunci:

a. [AE]≡[AF]
b. [AB]≡[AC]

O.L.Bucureşti 1991,



Soluţie:

a. Fie AD∩EF={M} (AM – bisectoare şi înălţime în ΔAEF => ΔAEF este isoscel =>[AE]≡[AF] (1)
b. [EM]≡[MF], DM⊥EF =>ΔDEF – este isoscel => [DE]≡[DF]≡ [DB]≡[DC] <DEB≡<DFC (au suplimete egale) =>ΔBDE≡ΔCDF (L.U.L)=>

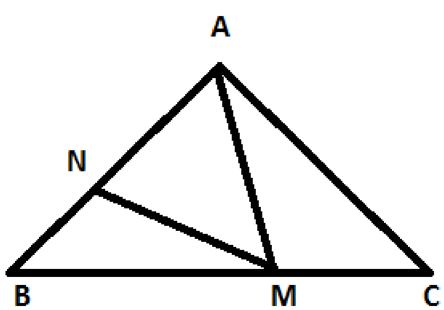
- ⇨ [BE]≡[CF] (2)

  Din relaţiile (1) şi (2) => [AB]≡[AC] (cu suma de segmente egale)

  OBS. Din <B≡<C(ΔBDE≡ΔCDF=>ΔABC – este isoscel => [AB]≡[AC]

36. Pe latura BC a triunghiului obtuzunghic isoscel ABC, [AB]≡[AC] se consideră punctul M astfel încât [BM]≡[AC], iar pe latura AB se consideră punctul N astfel încât [BN]≡[MC]. Dacă m(<AMN)=40º, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC

Eugeniu Blăjuţ



Soluţie:

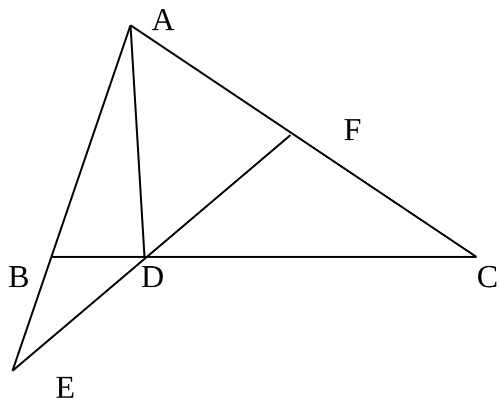
ΔBNM≡ΔCAM (L.U.L)

[BM]≡[AC], [BN]≡[MC], <B≡<C => [MN]≡[AM]=>ΔAMN este isoscel => m(<MAN=m(MNA)=(180º-40º):2=70º

[BM≡[AB]=>ΔABM – este isiscel =>m(<AMB)=m(<BAM)=70º, m(ABM =180º-140º=40º

ΔABC este isoscel => m(<ACB) = m(<ABC)=40º şi m(<BAC)=100º

37. Se consideră triunghiul ABC în care AB<AC, E∊(AB şi F∊(AC astfel încât [AE]≡[AC] şi [AF]≡[AB], EF ∩ BC={D}, arătaţi că <BAD≡<CAD



Soluţie:

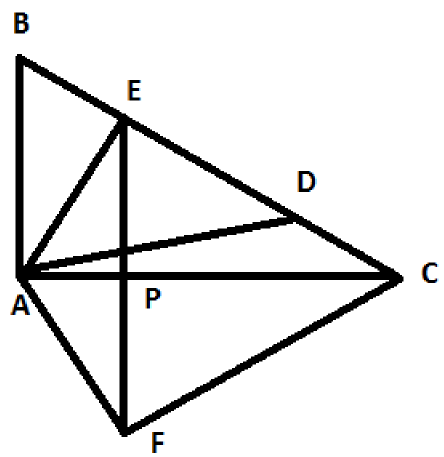
Din [AE]≡[AC], [AB]≡[AF] şi <A≡<A=> (L.U.L.) => ΔAEF≡ΔACB => <AEF≡<ACB şi <ABC≡<AFE=> <EBD≡<CFD (au suplimente egale)

BE= AE-AB, FC=AC-AF } =>[BE]≡[FC] cum <EBD≡<CFD şi <BED≡<FCD => (U.L.U.) Δ BED≡ΔFCD=>

- ⇨ [ED]≡[CD], dar [AE]≡[AC] şi [AD]≡[AD]=> (L.L.L.) ΔAED≡ΔACD => <BAD≡<CAD

38. Fie ABC un unghi dreptunghic în A, cu m(<B)=60º, iar D şi E pe latura BCastfel încât m(<CAD =10º şi (AE este bisectoarea <BAD. Arătaţi că [AD]≡[CE].

G.M.9/2012



Soluţie:

m(<ACB)=30º

m(<BAD)= 90º-10º= 80º

=> m(<BAE)=m(<DAE)=80º : 2=40º

m(<AED)=m(<BAE)+m(<ABE)=40º+60º=100º

m(<EDA)=(180º-40º+100º) = 40º=> ΔADE este isoscel, [AE]≡[ED]

Construim F simetrul lui E faţă de AC, AC ∩ EF = {P} =>ΔCEF este isoscel, m(<ECF)= 2·30º = 60º =>ΔCEF este echilateral => [CE]≡[EF] CF] (1)

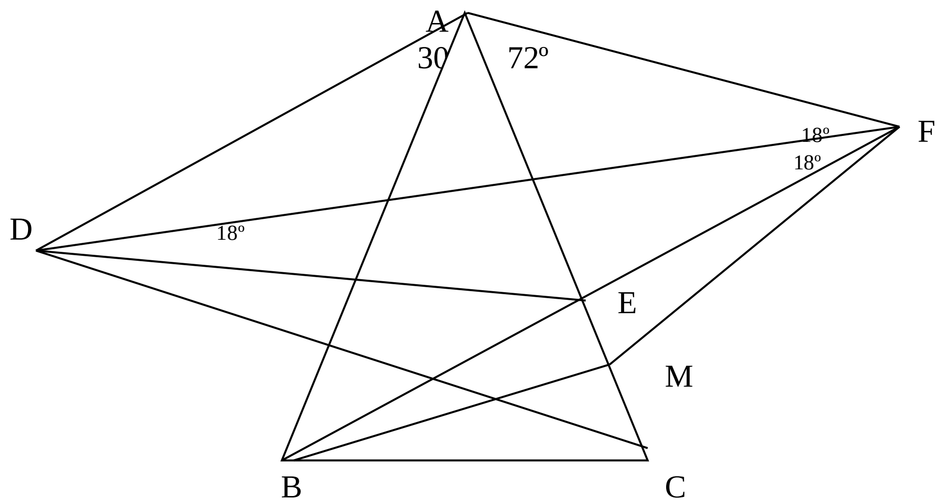
ΔAEF este isoscel, AE]≡[AF], m(<EAF) = 2·m(EAC)=2·50º=100º

ΔEAD≡ΔAEF (L.U.L.) => [AD]≡[EF] (2)

Din relaţia (1) şi (2) => [AD]≡[CE]

39. Se dă triunghiul ABC cu [AB]≡[AC] şi unghiurile <A şi <B sunt direct proporţionale cu numerele 2 şi 4. Fie D simetricul lui C faţă de AB. Determinaţi măsura unghiului DEB, dacă punctul E϶AC şi DE+EB este minimă.

O.L.Vaslui 2013



Soluţie:

m(<A)   m(<B)   m(<C)
---------- = ----------- = ---------- = k => m(<A) = 2k
    2   4   4

m(<B)=4k, m<©==k => 10k = 180º,   k= 18º => m(<A) = 36º

m(<B)=m(<C) = 72º

D simetricul lui C faţă de AB=> [AD]≡[AC]≡[AB]. Fie F simetricul lu D faţă de AC şi BF∩AC ={E}

AC mediatoarea lui DF => [DE]≡[EF]

DE+BE=FE+BE=BF

Pentru ∀ M϶(AC) cu M≠E=>BM+MD=MF+MB≥BF.Minimul are loc pentru M=E.AC mediatoarea lui DF =>

=>ΔADF şi ΔEDF sunt isoscele.

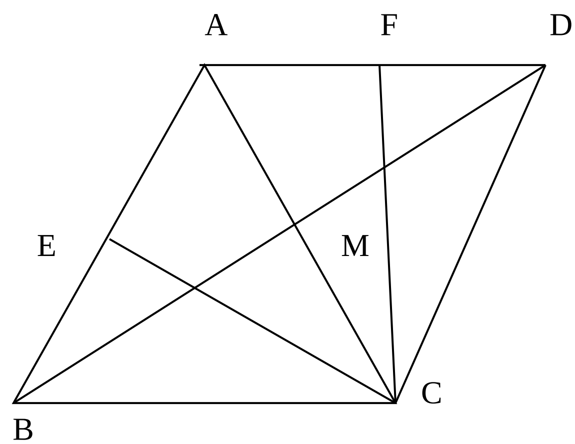
m(<AFE)=m(<ADF)=(180º-144º):2=18º

m(<ABF)=m(<AFB)=(180º-108º)=72º:2=36º

m(<DFE)=m(<FDE)=18º

⇨ m(<BED)=18º+18º=36º (unghi exterior ΔDEF)

40. In triunghiul isoscel ABC cu [AB]≡[AC], se consideră M mijlocul lui [AC] şi D un punct pe (BM astfel încât [AD]≡[AB], E mijlocul lui [AB] şi F mijlocul lui [AD]. Arătaţi că CE+CF =BD



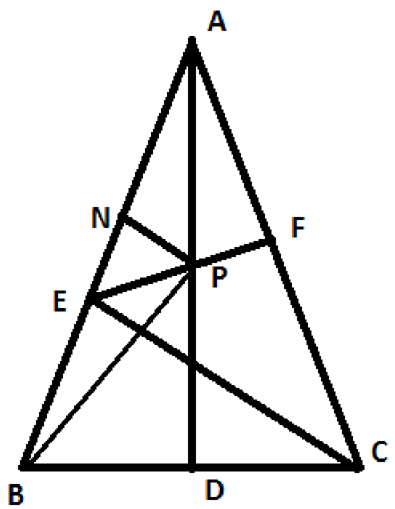
Soluţie:
[CE]≡[BM] (mediane corespunzătoare laturilor congruente într-un triunghi isoscel ΔABC)
[CF]≡[DM] (mediane corespunzătoare laturilor congruente într-un triunghi isoscel ΔACD)
BD=BM+MC = CE+CF

41. In triunghiul isoscel ABC, cu [AB]≡[AC], se consideră bisectoarele (AD, respective (CE cu D∈(BC), E∈(AB) şi punctele F, mijlocul lui (AC), astfel încât EF⊥AC

a. aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC

b.arătaţi că triunghiul ABP este isoscel, unde AD∩EF={P}

G.M.9/2015



Soluţie:

a. In ΔEAC, [EF] înălţîme şi median => triunghiul este isoscel =>[CE]≡[AE]

Notăm m(<BAD)=m(<CAD)=x => m(<EAC)= 2x, m(<ABC) = m(<ACB)=4x

$2x+4x+4x = 180^\circ \Rightarrow x=18^\circ$

⇨ m(<BAC)=36º, m(<ABC)=m(<ACB)=72º

Construim PN⊥AB, P∈ bisectoarei (AD) =>

⇨ [PN]≡[PF] => ΔAPN≡ΔAPF => AN=AF=$\frac{AC}{2}$ => N este mijlocul lui AB

Dar ΔAPN≡BPN (C·C) => [PB]≡[PA] => ΔAPB este isoscel

42. In triunghiul oarecare ABC, se consideră M şi N mijloacele segmenteloir [BC], respective (AM), punctul D simetricul punctului C faţă de A, BN∩AC={S}, DM∩AB={T} şi punctul P mijlocul segmentului [SC].

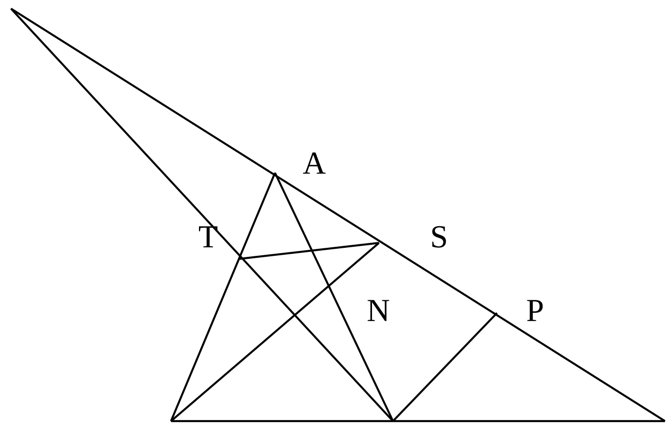
a. Demonstaţi că AC =3PC

b. Demonstraţi că ST||BC

c. Calculaţi aria triunghiului ANS, ştiind că aria triunghiului ABC este egală cu 48 cm^2.

O.L.Arad 2016

D



Soluţie:

a. [MP] linie mijlocie în ΔCBS => MP||BS, N mijlocul lui AM => [NS] linie mijlocie în ΔAMP => [AS]≡[SP]≡[PC] => AC=3PC

b. Aplicând teorema lui Menelaus în ΔABC pentru D-T-M => $\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CD}{DA} \cdot \frac{AT}{TB} = 1$

$= \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{AT}{TB} = 1 \Rightarrow \frac{AT}{TB} = \frac{1}{2}$

Dar $\frac{AS}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AT}{TB} = \frac{AS}{SC}$ (conform reciprocei teoremei lui Thales => ST││BC

c. $\frac{AS}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow A_{ABS} = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} = \frac{48}{3} = 16$ cm^2

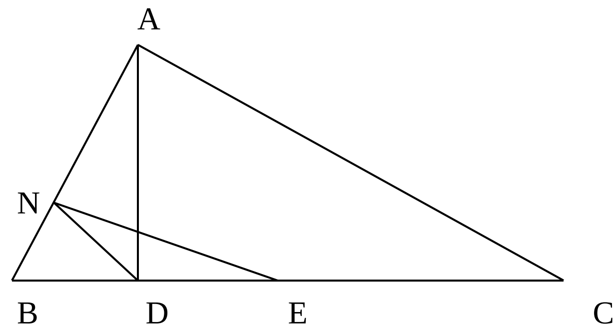
$A_{BCS} = A_{ABC} - A_{ABS} = 32$ cm^2 [MP] linie mijlocie în ΔBCS => $A_{MPC} = \frac{A_{BCS}}{4} = \frac{32}{4} = 8$ cm^2

[AM] mediană în ΔABC => $A_{ACM} = \frac{A_{ABC}}{2} = 24$ cm^2 => $A_{AMP} = 24-8 = 16$ cm^2

[NS] linie mijlocie în ΔAMP => $A_{ANS} = \frac{A_{AMP}}{4} = \frac{16}{4} = 4$ cm^2

43. In triunghiul ABC cu m(<B)>m(<C) avem AD⊥BC, D∊(BC) şi E mijlocul lui [BC]. Dacă AB=2·DE, arătaţi că m(<B)=2m(<C).

E:14887, G.M.9/2015



Soluţie:

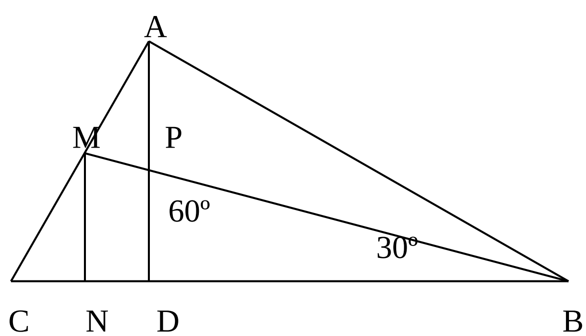
Fie N mijlocul lui AB [EN] linie mijlocie în ΔABC => EN││AC, <NED≡<C (corespondente)

$DE = \frac{AB}{2} = DN$ (DN median corespunzătoare ipotenuzei)

⇨ ΔDNE isoscel => m(<B)=m(NED)+m(<DNE)= 2·m(C)

44. Intr-un triunghi ascuţitunghic, o înălţime şi o mediană construite din vârfuri diferite formează un unghi cu măsura de 60º. Arătaţi că înălţimea şimediana au aceeaşi lungime.

G.M. 9/2015



Soluţie:

Notăm AD∩BM ={P} unde AD⊥BC, D∊(BC), BM mediană, M∊(AC)

Construim MN⊥BC=> MN││AD, [MN] linie mijlocie în ΔACD

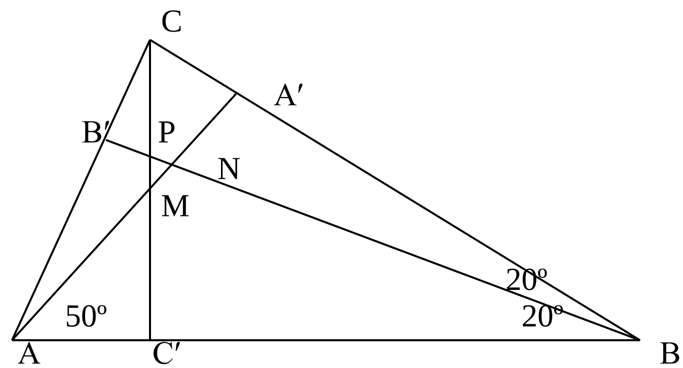
$MN = \frac{AD}{2}$ => AD = 2 MN (1)

$MN = \frac{BM}{2}$ (cateta opusă unghiului de 30º)=> BM =2MN (2)

Din (1) şi (2) => BM=AD

45. In triunghiul ABC cu m(<A)=80º şi m(<B)=40º, fie AA′⊥BC, CC′⊥AB şi BB′ bisectoarea <B. Arătaţi că triunghiul determinat de intersecţiile dreptelor AA′, BB′ şi CC′ este isoscel.

O.L.Buzău 2013



Soluţie:

Notăm cu CC∩AA′ ={M}

CC∩BB″ ={P}

AA′∩BB′ ={N}

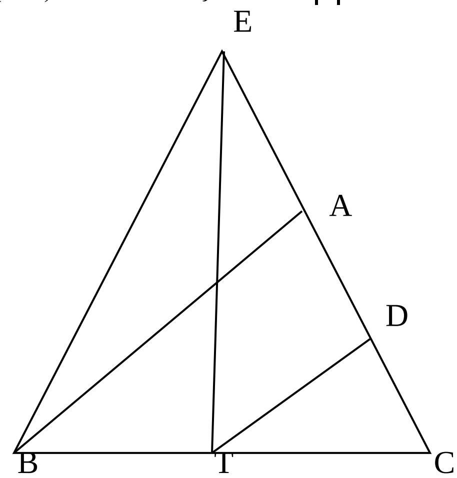
m(<ABB′)=m(<CBB′) = 40º:2=20º

m(<BAA′) = 90º-40º=50º=> m(<AMC′)= 90º-50º=40º

m(<BPC′)= 90º-20º=70º

m(<MNP)= 180º-(40º+70º)=70º => <MNP≡<MPN => ΔMNP – isoscel

46. In triunghiul ABC cu [AB]≡[AC], considerăm punctele Dϵ(AC) şi Eϵ(CA astfel încât [AC]≡[ED] şi punctele Tϵ(BC). Demonstaţi că DT││AB dacă şi numai dacă [EB]≡[ET].



Soluţie:

Din DT││AB=><EAB≡<EDT (corespondente)

[ED]≡[AC]≡[AB], [DT]≡[DC]

<ABC≡<ACB, <ABC≡<DTC (corespondente ΔDTC - isoscel) => (L.U.L.) ΔEBA≡ΔTED =>

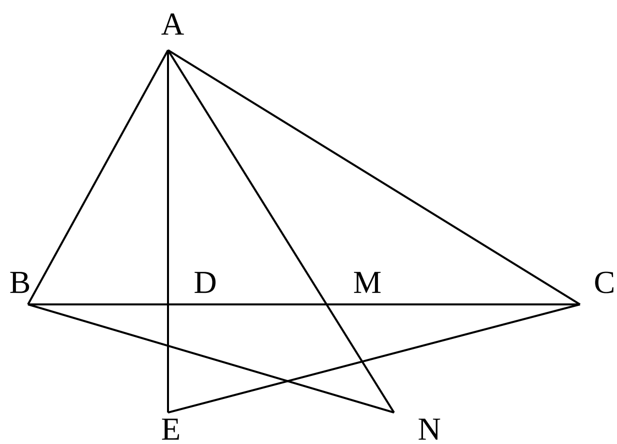
⇨ [EB]≡[ET]

ΔABC isoscel => <ABC≡<ACB, [BE]≡[TE]=><EBT≡<ETB, m(<EBA=m(<EBT)-m(<ABC)=m(<ETB)-m(<ACB)=m(<TEC)(<ETB este unghi exterior ΔETC => (L.U.L)=>

ΔEBA≡ΔTED ([EB]≡[ET], <EBA≡<TED, [AB]≡[ED] => <EAB≡<TDE (corespondente) => AB││TD

47. In triunghiul ABC ascuţitunghic notăm cu AD înălţimea şi cu AM mediana, unde D, M ϵ(BC). Segmentele [AD], [AM] se prelungesc dincolo de D, respective M cu [DE]≡[AD], respectiv [MN]≡[MA]. Demonstaţi că [BN]≡[CE].

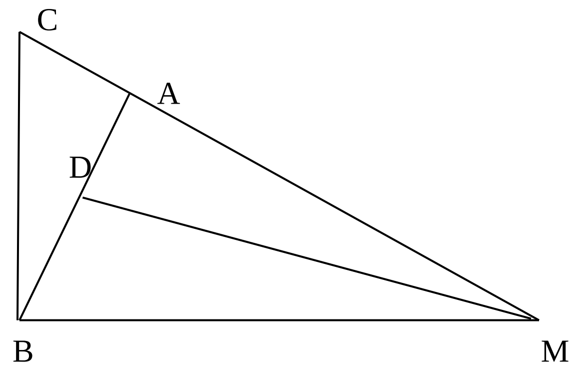
O.L.Hunedoara 2010



Soluţie:

CD – mediatoare şi înălţime în ΔCAE => ΔCAE isoscel => [CA]≡[CE]
[BM]≡[MC], [AM]≡[MN]
<BMN≡<AMC (opuse la vârf) => (L.U.L.) ΔBMN≡ΔCMA => [BN]≡[AC]≡[CE]

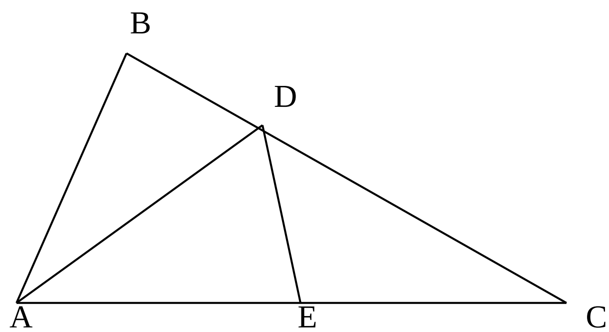
48. Se consideră ΔABC, m(<A) = 7 · m(<B). Mediatoarea segmentului [AB] intersectează dreapta AC în M. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC, ştiind că BM şi BC sunt perpendiculare.



Soluţie:

Notăm cu m(<B)=x, atunci m(<A) = 7x unde Oº<x<90º. MD – mediatoarea lui [AB]=> [MA]≡[MB], deci m(<MAB)=m(<MBA)
m(<MAB)=180º-7x
MB⊥MC =>m(<MBC)=90º şi m(<MBA) =m(<MBC)-m(<ABC)=90º-x
180º-7x=90º-x=> 6x=90º => x=15º
Unghiurile triunghiurilor ABC sunt m(<A)=7 · 15º=105º, m(<B)= 15º şi m(<C) = 180º-8-15º=60º
OBS. Dacă luăm C, M în acelaşi semiplan determinat de dreapta AB obţinem ΔBMD cu un unghi de 90º şi altul de 105º, ceea ce este imposibil.

49. Fie (AD bisectoarea <ABC a triunghiului ABC, Dϵ(BC), [AD]≡[DC] şi AB+BD=AC. Calculaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.



Soluţie:

Fie Eϵ(AC) astfel încât [AB]≡[AE], ΔABD≡ΔAED (L.U.L.) => [BD]≡[DE]

AB+BD=AC => AE+BD=AE+EC => [BD]≡[CE]

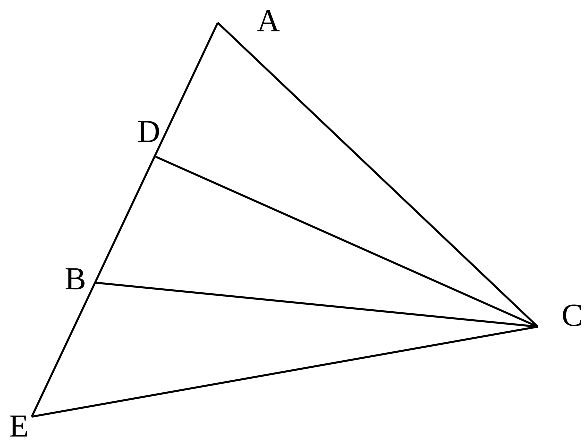
=>[ED]≡[EC] => ΔCED este isoscel. Notăm m(<C)=m(<EDC) = m(<DAB)= x (Deoarece [AD]≡[DC]) => m(<AED) = 2x (unghi exterior ΔCED.

Din ΔABD≡ΔAED => m(<ABC) = m(<AED) = 2x => m(<C) +m(<ABC)+m(<BAC)=x+2x+2x=180º,

=>x=36º => m(<C)= 36º, m(<ABC)=m(<BAC)=72º

50. Se consideră triunghiul ABC în care 3AB = 2AC şi m(<BAC)=60º. Dacă D este mijlocul lui [AB]. Arătaţi că [CD]≡[CB]

(O.M. etapa judeţeană, Suceava 1991)



Soluţie:

Fie E∊(AB astfel încât B∊(AE) şi [BE]≡[BD]

Din 3AB=2AC şi AB=2BD

$$\Rightarrow BD = \frac{AC}{3} \Rightarrow BE = \frac{AC}{3}$$

$$AE = AB + BE = \frac{2AC}{3} + \frac{AC}{3} = AC$$

[AE]≡[AC] şi m(<EAC) = 60º => ΔACE este echilateral, deci [CA]≡[CE]

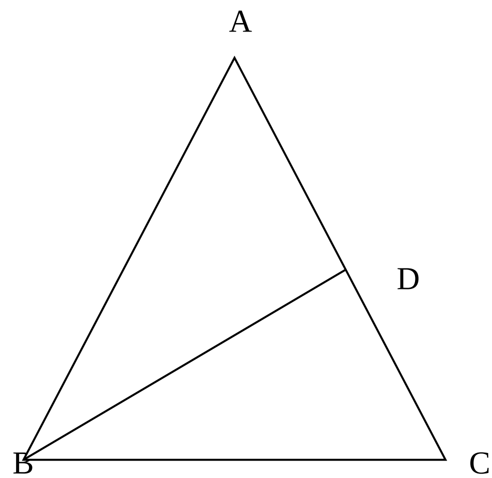
Prin urmare ΔCAD≡ΔCEB (L.U.L) => [CD]≡[CB]

51. Triunghiul ABC este isoscel cu [AB]≡[AC], iar m(<A)=36º. Bisectoarea <B intersectează AC în D. Demonstraţi că :

a. [AD]≡[BD]≡[BC]

b. BC^2=DC · AC

O.L. Timiş 2014



Soluţie:

a. Din [AB]≡[AC] => m(<ABC)= m(<ACB)=(180º-36º):2=144º":2=72º

[BD – bisectoarea <ABC => m(<ABD)=m(<BAD)=36º

=>ΔABD – isoscel => [BD]≡[AD] (1)

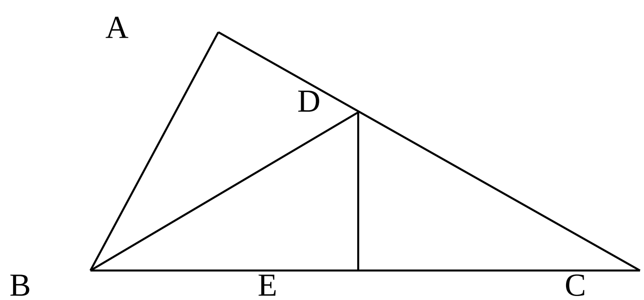
In ΔBDC, m(<BDC)=180º-(36º+72º)=72º => ΔBDC – isoscel => [BD]≡[BC] (2)

Din relaţia (1) şi (2) => [BD]≡[AD]≡[BC]

b. Aplicând teorema bisectoarei în ΔABC =>

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AB \cdot DC, \text{ dar } AD = BC \Rightarrow BC^2 = DC\ \ AB$$

52. Se consideră triunghiul ABC în care BC=2AB şi m(<B)=2·m(<C). Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului.



Soluţie:

Fie [BD – bisectoarea <ABC şi DE⊥BC, D∈(AC), E∈(BC)

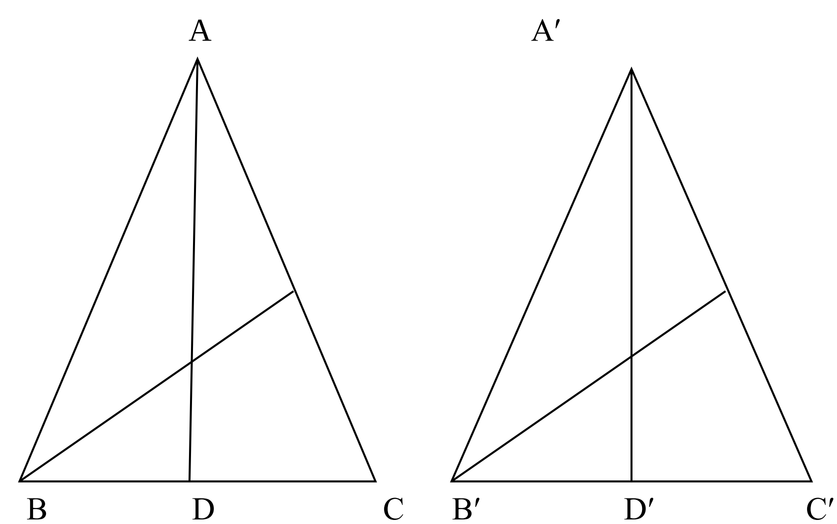
$m(<DBC)=\frac{m<ABC}{2} = m(<C)$=> ΔDBC – isoscel, din DE⊥BC

In triunghiul isoscel BDC=> [BE]≡[CE], cum BC=2AB => [BE]≡[BA]

=> ΔABD≡ΔEBD (L.U.L.) => m(<BAD)=m(<BED)=90º, m(<ABD)+m(<ACB)=90º=>

=> 3·m(<ACB)=90º=> m(<ACB)=30º şi m(<ABC)=60º

53. Se consideră triunghiul ABC şi A′B′C′, AD⊥BC, (BE-bisectoaa <ABC, D∈(BC), E∈(AC), A′D′⊥B′C′ şi (B′E′ -bisectoarea <A′B′C′, D′∈(B′C′), E∈(A′C′). Arătaţi că dacă [AD]≡[A′D′], [BE]≡[B′E′] şi <ABC≡A′B′C′, atunci ΔABC≡ΔA′B′C′.



Soluţie:

m(<ADB) =m(<A′D′B′)=90º, [AD]≡[A′D′]

şi <ABD≡A′B′D′ => (C.U.) ΔABD≡ ΔA′B′D′ => [AB]≡[A′B′]

Din [AB]≡[A′B′], [BE]≡[B′E′], <ABE≡<A′B′E′ => (L.U.L.) ΔABE≡ΔA′B′E′=>(L.U.L.) ΔABC≡ΔA′B′C′.

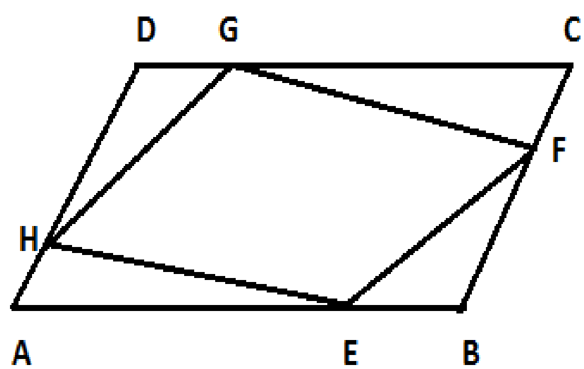
Din [AB] ≡ [AB], <ABC≡ <A′B′C′, <BAC ≡ <B′A′C′ =>(U.L.U) ΔABC≡ΔA′B′C′

“Adevărul este cee ace rămâne dupî ce elimini toate erorile”

Logica

Patrulatere particulare

1. În paralelogramul ABCD se consideră punctele E □ (AB), F □ (BC), G □ (CD), H □ (AD) astfel încât [AE] ≡ [CG] și [CF] ≡ [AH]. Arătați că EFGH este paralelogram.



Soluție: BE= AB-AE
DG=DC-CG
=>[BE] ≡ [DG]

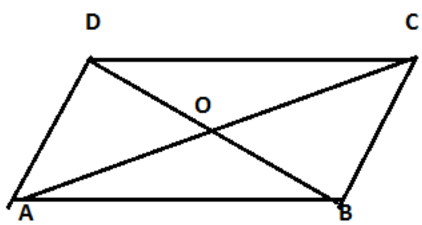
BF=BC-CF
DH=AD-AH
=>[BF] ≡ [DH]

□ A ≡ □ C (unghiuri opuse în paralelogram)
=>ΔAEH ≡ ΔCGH (L.U.L) => [HE] ≡ [GF] (1)

□B ≡ □ D (unghiuri opuse în paralelogram)
=>ΔEBF ≡ ΔGDH (L.U.L) => [EF] ≡ [HG] (2)

Din relațiile (1) și (2) => EFGH este paralelogram.

2.În patrulaterul ABCD, AB || DC, AC ∩ BD ={O} și [DO] = [BO]. Arătați că ABCD este paralelogram.

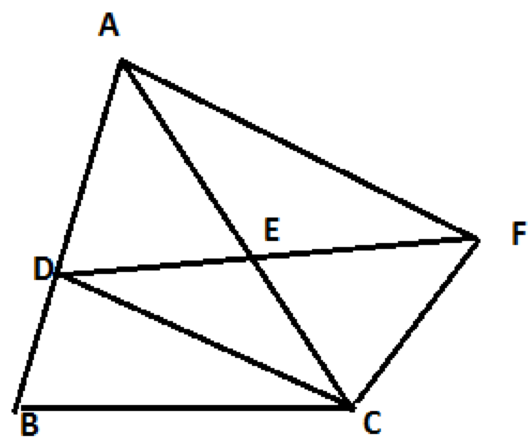


Soluție: AB || DC și BO secanta
=> □ABO ≡ □CDO
□AOB ≡ □DOC (opuse la vârf)
[DO] ≡ [BO]

=> ΔAOB ≡ ΔCOD (U.L.U)
=> [AO] ≡ [CO]

=>ABCD este paralelogram (deoarece diagonalele se înjumătațesc)

3.Demonstrați că linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului și are lungimea egala cu jumătate din lungimea acesteia.



Soluție: Construim F simetricul lui D față de E unde D este mijlocul lui [AB] și E este mijlocul lui [AC] => [DE]≡[EF] și [AE] ≡ [CE] => DCFA este paralelogram (doarece diagonalele se înjumătățesc)

=>FC ∥ BD și [FC] ≡ [BD] => BCFD este paralelogram

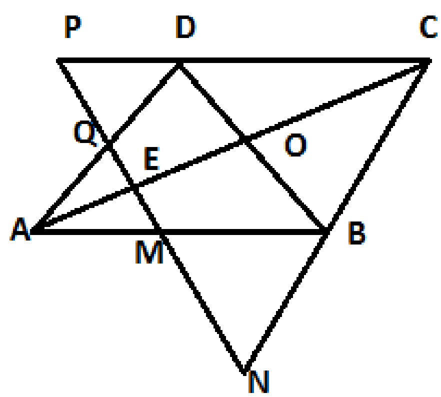
=>DE ∥ BC și DE= $\frac{DF}{2}$=$\frac{BC}{2}$

4.Prin punctul E situat pe diagonala AC a paralelogramului ABCD, se duce o paralelă la BD care intersecteaza dreptele BD,BC,CD,DA în punctele M,N,P,Q.

Demonstrați că: a) MQ+PN = constant

b) $AM \cdot CN = AQ \cdot CP$

O.L.Mureș 2013



Soluție: a) Din MQ || BD =>(T.Thales)

$$\frac{MQ}{BD} = \frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AO}$$

$$\frac{PN}{BD} = \frac{CN}{BC} = \frac{CE}{CO}$$

$$=> \frac{MQ}{BD} + \frac{PN}{BD} = \frac{AE}{AO} + \frac{CE}{CO} = \frac{AE + CE}{CO} = \frac{AC}{AO} = \frac{2AO}{AO} = 2$$
=constant

b) Din AM || CP=> ΔAEM ~ ΔCEP => $\frac{AM}{CP} = \frac{AE}{CE}$(1)

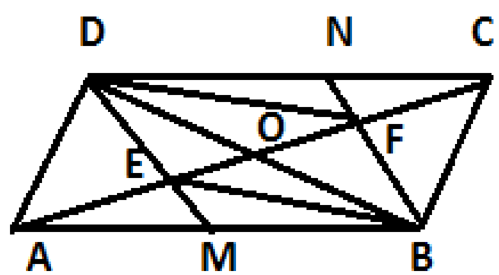
Din AQ || CN=> ΔAEQ ~ ΔCEN => $\frac{AQ}{CN} = \frac{AQ}{CP}$(2)

Din (1) și (2) => $\frac{AM}{CP} = \frac{AQ}{CN}$=> $AM \cdot CN = AQ \cdot CP$

5.În paralelogramul ABCD, M este mijlocul lui [AB], iar N este mijlocu lui[CD]. MD ∩ AC = {E}, MB ∩ AC = {F}. Arătați că:

a)[AE]=[EF] ≡ [FC]

b)BEDF este paralelogram



Soluție: a) Din DM || BM și DN=BM=$\frac{AB}{2}$ =>MBND-paralelogram

=>BN || DM

EM || FB și [AM] ≡ [MB]

=>EM este linie mijlocie în ΔABF

=>[AE] ≡ [EF]

Analog FN-linie mijlocie in ΔCDE => [CF] ≡ [EF]

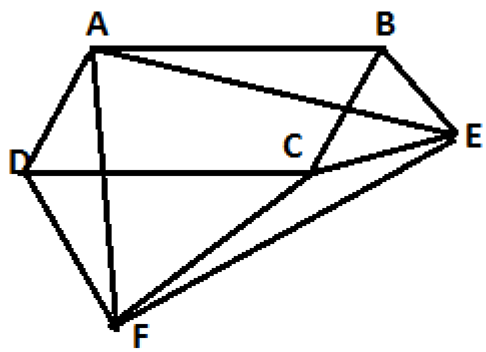
=>[AE] ≡ [EF] ≡ [CF]

b) Notăm {O}= AC ∩ BD => [BO] ≡ [DO] și [AO] ≡ [CO]

EO=AO-AE și OF=CO-CF => [OE] ≡ [OF]

=>BEDF este paraleolgram (doarece diagonalele se înjumătățesc)

6.Pe laturile BC și CD ale paralelogramului ABCD se construiesc în exteriorul său triunghiurile echilaterale BCE și CDF. Arătați că triunghiul AEF este echilateral.



Soluție: m(□ ABE)= m(□ ABC)+ 60° =m(□ADP)

[AB] ≡ [DC] ≡ [DF]

[BE] ≡ [BC] ≡ [AD]

=>(L.U.L) ΔABE ≡ ΔFDA

=>[AE] ≡ [AF] (1)

m(□FCE)=360°-[m(□FCD)+m(□BCD)+m(□ECB)]

=360°-[120°+180°-m(□ABC)]

=360°-[300°-m(□ ABC)]

=60°+m(□ABC)

=> □ ABE ≡ □ FCE

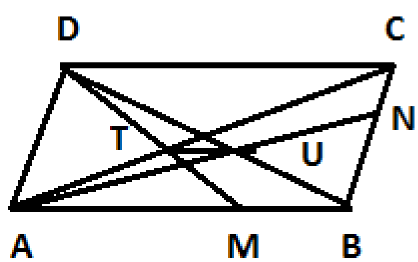
[AB] ≡ [FC], [BE] ≡ [CE] =>(L.U.L)

ΔABE ≡ ΔFCE
=>[AE] ≡ [FE] (2)

Din relațiile (1) și (2) => ΔAFE este echilateral.

7.Fie ABCD un paralelogram. Pe segmentele [AB] și [BC] se iau punctele M, respectiv N, astfel încât $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{CN}$. Dacă {T}= DM ∩ AC și {U}= BD ∩ AM, demonstrați că AB || TU.

G.M. 12/2016



Soluție: Din $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{CM}$=> $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{BC} = k$

Notăm AB=L și CB=l => BM=kL și CN=k·l
AM=AB-MB=L-kL=L(1-k)
BN=BC-CN=l-kl=l(1-k)

Din AM || DC => ΔATM ~ ΔCTB

=> $\frac{AT}{TC}=\frac{TM}{TD}=\frac{AM}{DC}=L\frac{(1-k)}{L}=1-k(1)$

Din AD || BN => ΔMUB ~ ΔAUD
=> $\frac{MU}{UA}=\frac{BU}{UD}=\frac{BN}{AD}=l\frac{(1-k)}{l}=1-k(2)$

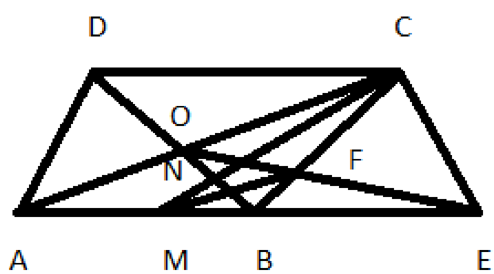
Din relațiile (1) și (2) => $\frac{TM}{TD}=\frac{BU}{UD}=1-k$

Conform reciprocei teoremei lui Thales
=>TU || AM => TU || AB

8. ABCD este un paralelogram în care AC=2AD. Fie E simetricul lui A față de B și {F}=EO∩BC, unde {O}=AC∩BD. Construim FM || AC, cu M∈(AB)

a) Arătați că CM ⊥ BD

b) Calculați A_{ABCD} știind că BD=5cm, și CM=4cm.



Soluție: a) În ΔACE, CB și EO sunt mediane concurente în {F} => F este centrul de greutate al triunghiului

$$=> \frac{CF}{BF}=2$$

În ΔABC MF | | AC (Conform T.Thales) avem:

$$\frac{CF}{BF} = \frac{AM}{BM} = 2$$

În ΔABC:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA}{AD} = \frac{2AD}{AD} = 2 = \frac{AM}{BM}$$

Atunci conform reciprocei teoremei bisectoarei ΔBOC este isoscel => CM ⊥ BD

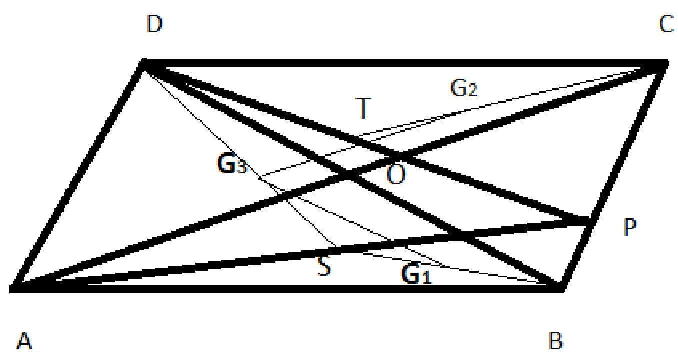
b) Fie BD ∩ CM ={N}. Conform T.F.A. ΔCMD ~ ΔMND

$$=> \frac{CN}{MN} = \frac{CD}{MB} = \frac{AB}{MB} = 3$$

$$=> \frac{CN}{CM} = \frac{CN}{CN + MN} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} => CN = 3cm$$

$A_{ABCD}=2A_{BCD}=BD*CN=15cm^2$

9. În paralelogramul ABCD se consideră P∈(BC). Dacă G_1,G_2,G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor APB, APD și DPC atunci demonstrați că aria triunghiului $G_1G_2G_3$ a noua parte din aria paralelogramului ABCD.



Soluție: Fie S,T-mijloacele segmentelor [AP] și [DP], AC ∩ BD ={O}

Din reciproca teoremei lui Thales => $G_1G_2 \parallel BD$

=>$\Delta G_1SG_2 \sim \Delta BSD$

$$=> \frac{\mathrm{G1G2}}{BD} = \frac{1}{3} = \frac{G1G2}{BO} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

Din reciproca teoremei lui Thales => $\Delta G_2TG_3 \sim \Delta ATC$

$$=> \frac{G2G3}{AC} = \frac{1}{3} = \frac{G2G3}{OC} = \frac{2}{3} \ (2)$$

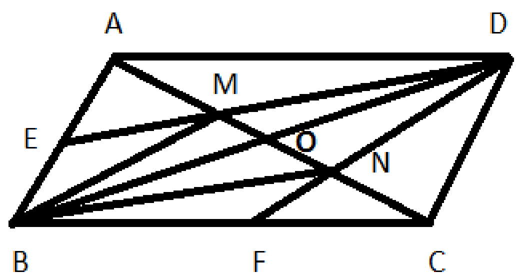
$G_1G_2 \parallel BD$ și $G_2G_3 \parallel AC$ => $\measuredangle G_1G_2G_3 \equiv \measuredangle BOC$ (3) (unghiuri cu laturile paralele)

Din (1), (2) și (3) => $\Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta BOC$

$$A_{G1G2G3}/A_{BOC}=(G_1G_2)^2/BO^2=\frac{4}{9}$$

$$=>A_{G1G2G3}=4/9\cdot A_{BOC}=4/9\cdot A_{ABCD}/4=1/9\cdot A_{ABCD}$$

10. În patrulaterul ABCD, notăm cu E și F mijloacele laturilor [AB] și respectiv [BC]. Dreptele DE și DF intersectează diagonala AC în M și respectiv N. Dacă [AM] ≡ [MN] ≡ [MC], demonstrați că ABCD este paralelogram.

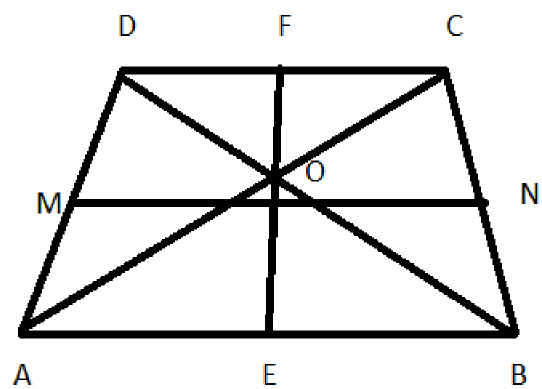


Soluție: [EM] este linie mijlocie în ΔABN => EM | | BN și DM | | BN

La fel BM | | DM => MBND este parallelogram

Atunci diagonalele MN și BD se înjumătățesc. Mijlocul lui [MN] coincide cu mijlocul lui [AC], deci diagonalele [AC] și [BD] se înjumătățesc și ABCD este paralelogram.

11. Demonstrați că într-un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare,lungimea înălțimii este egală lungimea linii mijlocii.



ΔAOB-drepunghic isoscel și OE ⊥ AB => OE este și mediană

$$=> OE = \frac{AB}{2} \quad (1)$$

ΔDOC-drepunghic isoscel și OF ⊥ DC => OF este și mediană

$$=> OF = \frac{DC}{2} \quad (2)$$

Din (1) și (2)

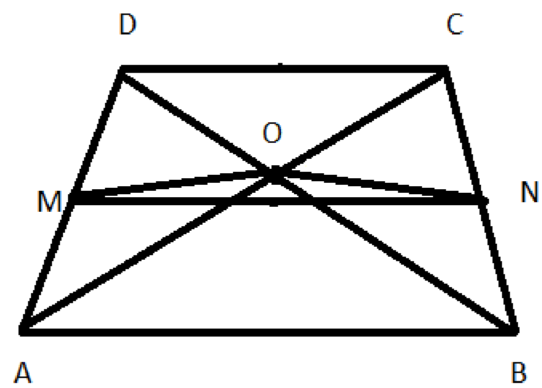
$$=> OE + OF = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB + DC}{2} = MN$$

(unde MN este linie mijlocie în trapez)

⇨ EF=MN

12.Demonstrați că într-un trapez ABCD cu diagonalele perpendiculare avem AD+BC ≥ AB+DC, unde AB | | DC.

O.L. Timiș 2017



Soluție: Fie M,N- mijloacele laturilor [AD],[BC]

În ΔAOD-dreptunghic :

$$OM = \frac{AD}{2}$$

În ΔCOB-dreptunghic :

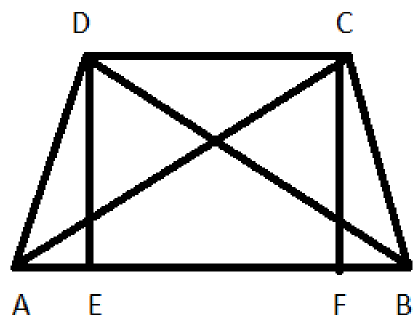
$$ON = \frac{BC}{2}$$

OM+ON≥ MN

$$=> \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} \geq \frac{AB + DC}{2}$$

=>AD+BC≥AB+DC (egalitate avem dacă O∈ MN)

13. Demonstrați că un trapez cu diagonalele congruente este isoscel.



Soluție: Fie DE ⊥ AB, CF ⊥ AB

=>[DE] ≡ [CF] și [AC] ≡ [BD]

=>(I.C) ΔACF ≡ ΔBDE

=>[AF] ≡ [BE]

Din [DE]≡[CF]

[AE]≡[BF]

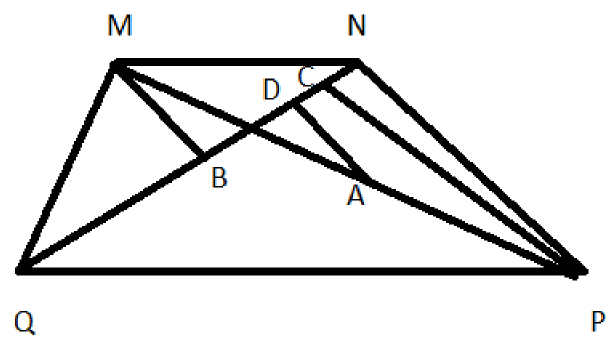
=>(C.C) ΔDAE ≡ ΔCBF

=>[AD] ≡ [BC]

=>ABCD-trapez isoscel

14. În trapezul MNPQ (MN | | PQ, MN < PQ) iar A mijlocul segmentului MP. Punctele B,C și D sunt picioarele perpendicularelor din M, P respectiv A pe dreapta NQ. Arătați ca [BD] ≡ [DC].

O.L. Neamț 2017



Soluție: Din MB ⊥ QN, AD ⊥ QN, PC ⊥ QN

=>MB | | AD | | PC

Conform T.Thales în ΔOBC avem:

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OD}{DC}$$

Iar în ΔOBM

$$=> \frac{AO}{AM} = \frac{OD}{DB}$$

AP=AM

$$=> \frac{OA}{AP} = \frac{OA}{AM} => \frac{OD}{DC} = \frac{OD}{DB} => DC = DB$$

=>[DC] ≡ [DB]

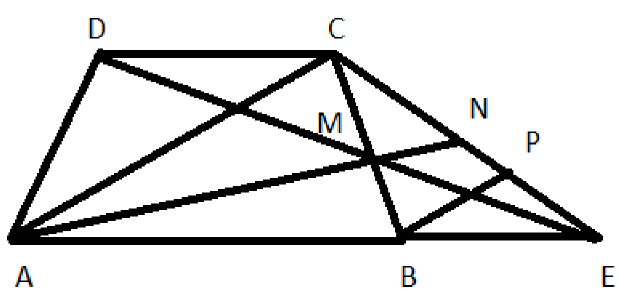
15. În trapezul ABCD oarecare, AB | | CD, AB baza mare, (AM-bisectoarea unghiului

∡CAB, M ∈ [BC], astfel încât [BM] ≡ [MC] și DM ∩ AB ={E}.

a) Arătați că DBEC este paralelogram

b) Dacă AM∩CE={N} și BP ⊥BC, P∈[CE], arătați ca 2MN=BP

O.L. Satu Mare 2017



Soluție: a) [BM] ≡ [MC], ∡BMC ≡ ∡DMC (opuse la vârf)

∡MCD≡∡MBC (alterne interne)

=>(U.L.U.) ΔDCM≡ΔCBM =>BP | | MN

=> DBEC paralelogram (diagonalele se înjumătățesc)

b) MN ⊥BC și BP⊥BC =>BP | | MN, M este mijlocul lui [BC]

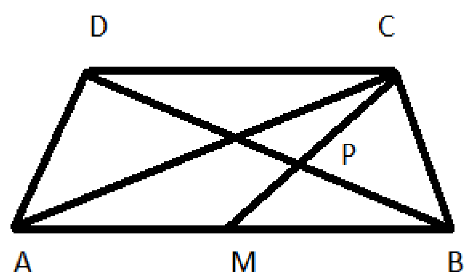
=> [MN] este linie mijlocie în ΔBCP

$$=> MN = \frac{PB}{2} = 2MN = PB$$

16. Se consider trapezul ABCD, AB | | CD, AB > CD. AB=2AD=2CD, M este mijlocul laturii [AB], MC ∩ BD = {P}.

a) Stabiliți natura triunghiului ABC

b) Arătați că $A_{PMB}=\frac{1}{6} A_{ABCD}$



Soluție: a) Din AB=2AD=2DC și M-mijlocul lui [AB] =>[AM] ≡ [AC]

=>ADCM este paralelogram

Cum [AM] ≡ [AD] =>ADCM este romb

=>AC ⊥ MD (1)

BM | | DC și [BM] ≡ [DC] =>BMDC-paralelogram

=>BC | | MD (2)

Din (1) și (2) =>AC ⊥ BC

=>ΔACB-dreptunghic

Obs.: Din

$$CM = \frac{AB}{2}$$

CM-mediană =>ΔACB-dreptunghic

b) $A_{ADC}=A_{AMC}=A_{MBC}=\frac{A\ ABCD}{3}$ (1)

$A_{ADC}=A_{AMC}=\frac{A\ ADCM}{2}$

(jumătatea ariei unui paralelogram)

$A_{AMC}=A_{MBC}=(A_{ACB})/2$ (mediana împarte triunghiul în două triunghiuri cu arii egale)

[MP] = [PE] => $A_{PMB}=(A_{MBC})/2$ (2)

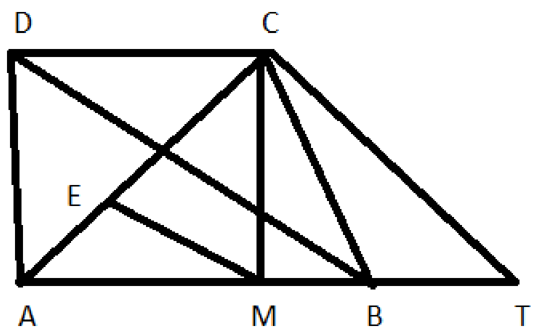
Din (1) și (2) =>$A_{PMB}=1/2\cdot(A_{ABCD})/3=(A_{ABCD})/6$

17. Se consideră trapezul ABCD cu AB | | CD, AB > CD și AC ⊥ BD. Fie E mijlocul diagonalei [AC]. Paralela prin E la [BD] intersectează pe AB în M. Demonstrați că:

a) ΔAMC este isoscel

b) $ME = \frac{BD}{2}$ și $CM = \frac{AB+CD}{2}$

O.L. Alba 2016



Soluție: a) În ΔAMC, [ME] este mediană și înălțime (ME | | BD, BD ⊥ AC)

=>ΔAMC este isoscel

b) Fie CT | | BD. În ΔACT, [ME] este linie mijlocie =>ME=$\frac{CT}{2}$

BTCD este paralelogram =>ME=$\frac{BD}{2}$

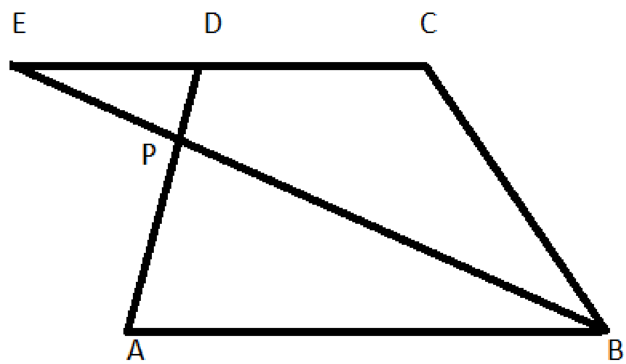
DC=BT=> AT=AB+BT=AB+DC

[CM] este mediană în triunghiul dreptunghic ACT =>

$CM = \frac{AT}{2} = \frac{AB+CD}{2}$

18. Fie ABCD un trapez dreptunghic cu m(∠A) = m(∠D)=90 ° și P un punct variabil pe [AB]. Arătați că suma PB+PC este minima dacă și numai dacă $\frac{AP}{DP} = \frac{AB}{CD}$.

Ion Voicu E14791 G.M. 2/2015



Soluție: Fie E simetricul lui C față de D. PD este mediatoarea segmentului [EC]

=>[PE] ≡ [PC]

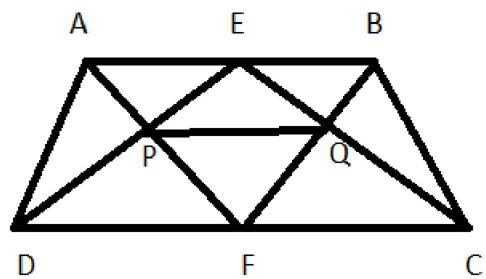
PB+PC ≡ PB+PE care este minim < = > B,P,E sunt coliniare

< = > ΔPDE ~ ΔPAB

$$=> \frac{AP}{DP} = \frac{AB}{DC}$$

19. Fie ABCD un trapez, AB | | CD, AB < CD, E mijlocul lui [AB], F mijlocul lui [CD], AF ∩ DE ={P}, BF ∩ CD = {Q}. Arătați că AB | | PQ.

O.L. Ilfov 2015



Soluție: Din AE | | DF => ΔPAE ~ ΔPFD

$$=> \frac{PE}{PD} = \frac{EA}{DF}$$

EA=$\frac{1}{2}AB,\ FD = \frac{1}{2}DC$

$$=> \frac{PE}{PD} = \frac{AB}{DC}\ \ (1)$$

Analog din BE | | FC

=>ΔQBE ~ ΔQFC

$$=> \frac{QE}{QC} = \frac{BE}{FC} = \frac{AB}{DC}$$

$$=> \frac{QE}{QC} = \frac{AB}{DC}\ (2)$$

Din relațiile (1) și (2)

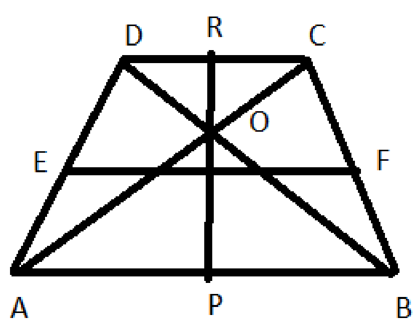
$$=> \frac{PE}{PD} = \frac{QE}{QC}$$

Conform reciprocei teoremei lui Thales => PQ | | DC dar AB | | DC

=>PQ | | AB

20. Arătați că într-un trapez isoscel înălțimea este egală cu linia mijlocie dacă și numai dacă diagonalele sunt perpendiculare.

O.L. Hunedoara 2015



Soluție: OP ⊥ AB, OR ⊥ DC, trapezul fiind isocel => ΔODC și ΔOAB sunt triunghiuri dreptunghice isoscele.

$$=> OP = \frac{AB}{2} \text{ și } OR = \frac{DC}{2}$$

$$=> OP + OR = \frac{AB + DC}{2} = EF \ (unde\ EF\ este\ linie\ mijlocie)$$

Reciproc ΔAOB ~ ΔDOC

$$=> \frac{RO}{OP} = \frac{DC}{AB}$$

$$=> \frac{RO + OP}{OP} = \frac{DC + AB}{AB}$$

$$=> \frac{PR}{OP} = \frac{AB + DC}{AB}$$

$$Dar \frac{AB + DC}{2} = PR$$

$$=> \frac{PR}{OP} = \frac{2PR}{AB}$$

$$AB = 2OP => OP = \frac{AB}{2}$$

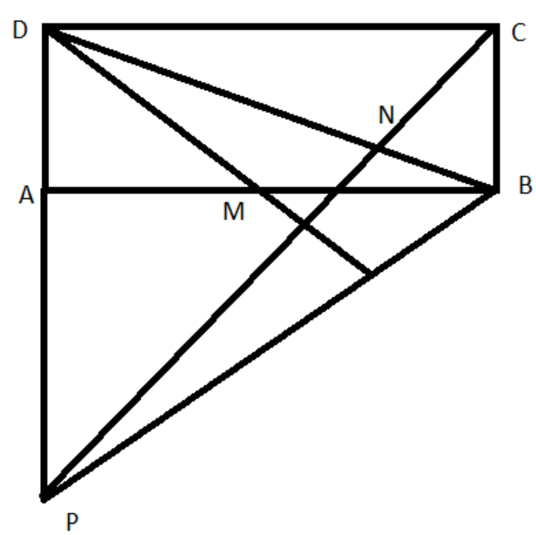
Analog $OR = \frac{DC}{2}$, cum ΔAOB și ΔDOC sunt isoscele =>AC ⊥ BD

21. În dreptunghiul ABCD perpendiculara din C pe diagonala BD intersectează pe (AB) în M și pe (AD) în P. Arătați că:

a) DM ⊥ PB

b) DB · DC = DA · PC

O.L. Bistrița Năsăud 2016



Soluție: a) În ΔBPD, BA ⊥ PD și PM ⊥ BD =>M este ortocentrul triunghiului ΔBPD => DM ⊥ PB

b) ∡CDB ≡ ∡ADB (alterne interne)

m(∡DCP) = 90°-m(∡CDB) ΔDCN-dreptunghic (1)

În ΔADB => m(∡ADB)=90°-m(∡ABD) (2)

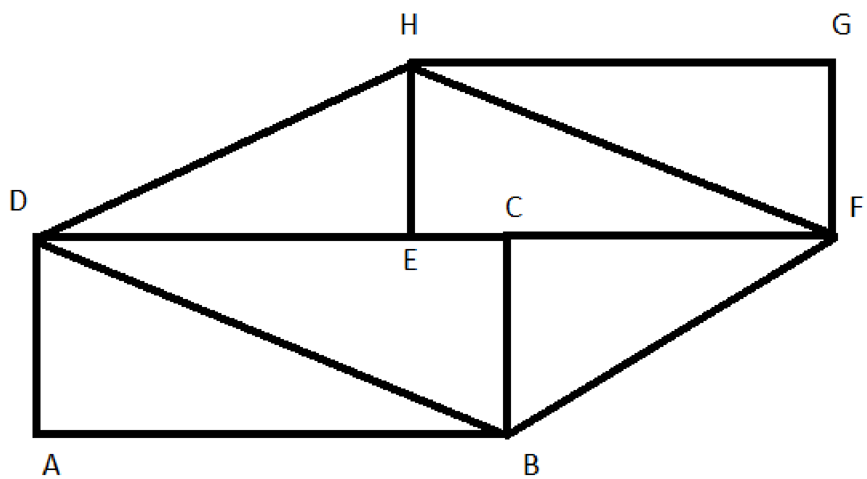
∡CDB ≡ ∡ADB (3)

Din relațiile (1), (2) și (3) => m(∡DCP)=m(∡ADB)

=>ΔADB ~ ΔDPC

$=> \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{PC} => AD \cdot PC = BD \cdot DC$

22. În figura alăturată, patrulaterele ABCD și EFGH sunt dreptunghiuri având aceleași dimensiuni. Arătați că BDHF este paralelogram.



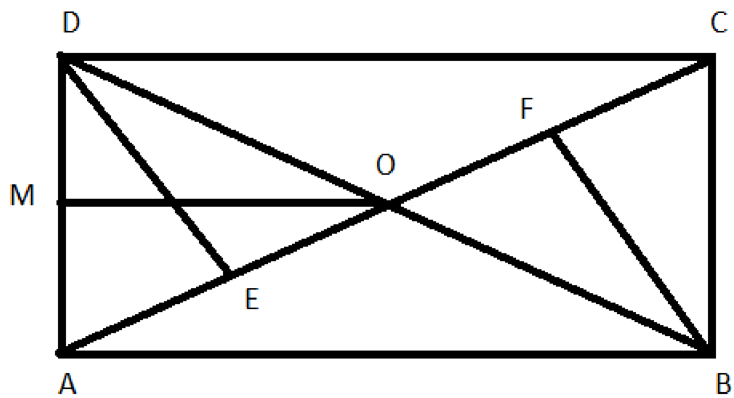
Soluție: Din A, m(∡BCD)=m(∡HEF)=90°, [BC] ≡ [HE] și [CD] ≡ [EF]

=>ΔBCD ≡ ΔHEF (C.C)

=>[BD] ≡ [HF] și ∡BDC ≡ ∡HFE (alterne interne) =>BD | | HF

=> BDHF este paralelogram

23. Se consider dreptunghiul ABCD, E și F picioarele perpendicularelor din D, respective B pe AC. Arătați că dacă [EF] ≡ [AD], atunci unghiul ascuțit format de diagonalele dreptunghiului are măsura de 60°.



Soluție: AC ∩ BD = {O}, [OD] ≡ [OB], ∡DOE ≡ ∡BOF (opuse la vârf)

=>(I.U) ΔDOE ≡ ΔBOF

=>[EO] ≡ [OF]

$$=> EO = \frac{EF}{2} = \frac{AD}{2}$$

Fie M mijlocul lui [AD]

$$DM = \frac{AD}{2} => [DM] = [EO]$$

[DO]-catetă comuna => (I.C) ΔDMO ≡ ΔOED

=>∡MDO ≡ ∡EOD =>ΔADO este isoscel

=>[AD] ≡ [AO] dar [AO] ≡ [DO]

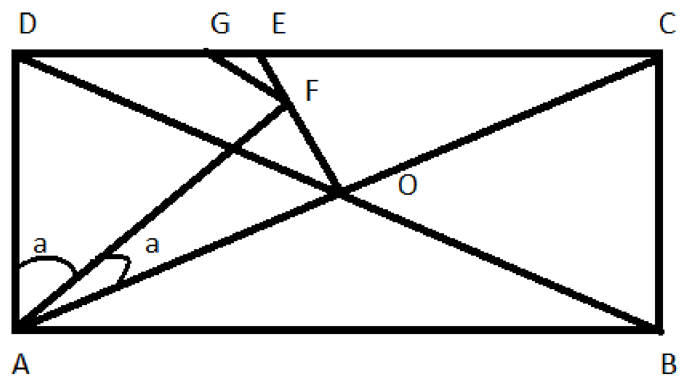
=>ΔADO echilateral =>m(∡AOD)=60°.

24. În dreptunghiul ABCD notăm cu O intersecția diagonalelor. Perpendiculara în O pe AC intersectează latura DC în E și bisectoarea ∡DAC în F. Perpendiculara în F pe AF intersectează latura DC în G. Se cere:

a) Arătați că ΔFEG este isoscel

b) Aflați valoarea ∡DAC pentru care dreapta FG este paralelă cu DB.

O.L. Ialomița 2011



Soluție: a) Notăm ∡DAF=∡FAC=a, atunci ∡ACD=90°-2a,

∡OFC=90°-(∡OCE)=90°-(90°-2a)=2a

=>∡EFG=∡FAC=a, ∡EGF=∡CEO-∡EFG=2a-a=a

=>∡EFG=∡EGF=a =>ΔEFG este isoscel

b) Dacă GF | | BD, atunci ∡EGF=∡CDB (alterne interne)

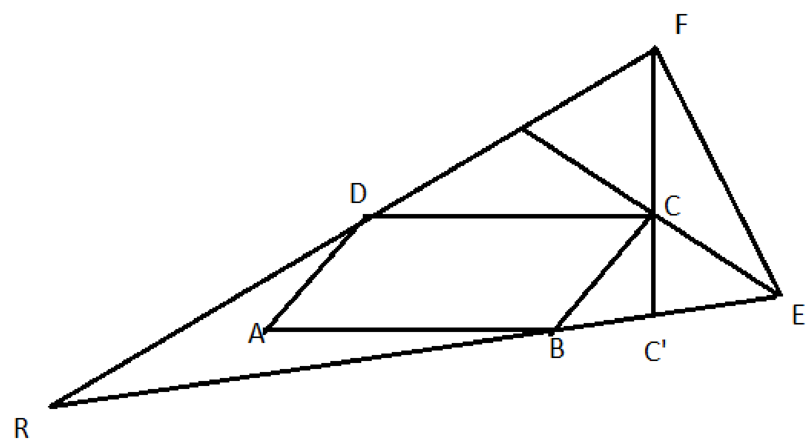
=> a=90°-2a =>a=30° iar m(∡DAC)=60°

25. Fie dreptunghiul ABCD. Pe laturile [BC] și [DC] constuim în exteriorul dreptunghiului triunghiurile echilaterale BCE și DCF. Demonstrați că:

a) FC ⊥ BE

b) RC ⊥ EF, unde {R}=EB ∩ DF

Ion Bilciurescu



Soluție: a) Fie FC ∩ BE={C'} =>m(∡BCC')=180°-(90°+60°)=30°

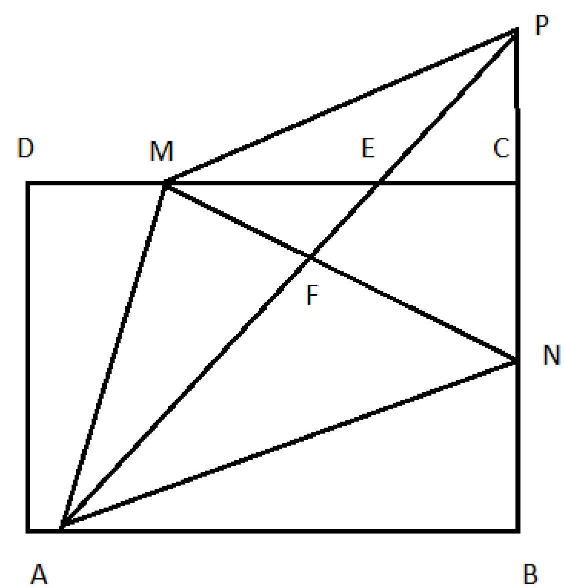
=>[CC' -bisectoarea ∡BCE =>CC' ⊥ BE

=>FC ⊥ BE

b) FC ⊥ BE, EC ⊥ DF => C-ortocentrul ΔEFR =>RC ⊥ EF

26. Pe latura DC a pătratului ABCD se consider punctul E și fie {P}=AE ∩ BC, iar AN bisectoarea ∡EAB, N ∈ (BC). Perpendiculara din P pe NE intersectează dreapta DC în M. Demonstrați că (AM este bisectoarea unghiului DAE.

O.L. Bacău 2016



Soluție: Din NE ⊥ MP și ME ⊥ NP => E este ortocentrul ΔMNP => PE ⊥ MN

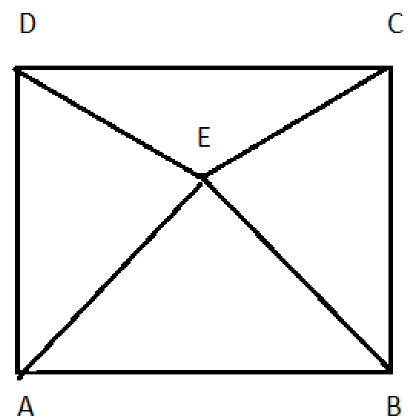
Notăm {F}=PE ∩ MN

ΔABN ≡ ΔAFN (I.U) => [AB] ≡ [AF]

ΔADM ≡ ΔAFM (I.C)

=>∡DAM ≡ ∡FAM =>AM este bisectoarea ∡DAE

27. În interiorul pătratului ABCD se consider un punct E astfel încât ΔAEB este echilateral. Determinați măsura unghiului ∡CDE.



Soluție: Din ΔABE echilateral => m(∡DAE)=90-60=30

[AE]=[AB]=[AD] =>ΔDAE este isoscel

=>m(∡ADE)=m(∡AED)

=(180°-30°):2=150°:2=75°

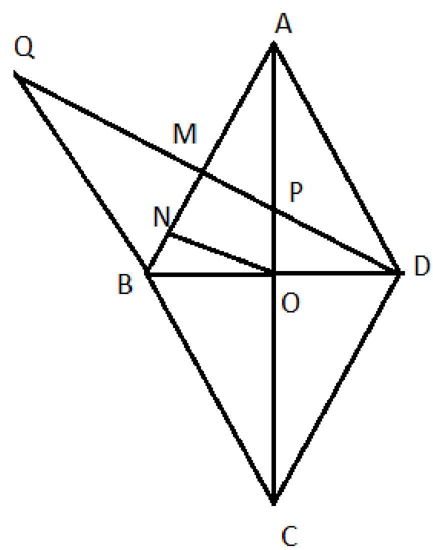
=>m(∡CDE)=90°-75°=15

28. În rombul ABCD, AC ∩ BD={O}, M ∈ (AB), astfel încât AM=1,5MB.

a) Dacă ON | | DM, N ∈ (AB) determinați raportul $\frac{AN}{MB}$.

b) Dacă DM ∩ AC={P} și DM ∩ BC={Q}, determinați raportul $\frac{PM}{DQ}$

Damian Marinescu



Soluție: a)

$$\frac{AM}{MB} = 1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} => \frac{AM}{MB} = \frac{3}{5}$$

O mijlocul lui [BD], ON | | MD =>ON- linie mijlocie în ΔBMD

=>BN=MN=>MB=2NB

=>AM=3MB =>AN=4MB

$$=>\frac{AN}{MB}=4$$

b) AP- bisectoarea MAD (conform teoremei bisectoarei în ADM) avem

$$\frac{AM}{AD}=\frac{MP}{PD}$$

$$\frac{AM}{AD}=\frac{AM}{AB}=\frac{3}{5}=>\frac{MP}{PD}=\frac{3}{5}=>\frac{MP}{MD}=\frac{3}{8}\ (1)$$

Din AD | | BQ (conform T.F.A) =>ΔAMD ~ ΔBMQ

$$=>\frac{AM}{BM}=\frac{AD}{BQ}=\frac{MD}{MQ}=>\frac{MD}{MQ}=\frac{AM}{BM}=\frac{3}{2}$$

$$=>\frac{MD}{DQ}=\frac{3}{5}\ (2)$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) $=>\frac{MP}{MD}\cdot\frac{MD}{DQ}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}=>\frac{MP}{DQ}=\frac{9}{40}$

Bibliografie

1. Cohal T.;Cohal E.: Geometrie- Probleme rezolvate pentru gimnaziu și liceu, Editura Polinom, Iași, 1996.
2. Cuculescu I.; C. Ottescu; L. Gaiu: Geometrie- Manual pentru clasa a VII-a, Editura Didactica și Pedagogica, București, 1995.
3. Ghioca A.; L. Cojocaru- Matematica gimnazială dincolo de manual, Editura Gil, Zalău, 2005.
4. Linț D.; Linț M.; Marinescu R.; Marinescu D. Șt.; Monea M.; Stroe M.- Matematică de excelență pentru concursuri și centru de excelență clasa a VII-a, Editura Paralela 45, 2013.
5. Linț D.; Linț M.; Marinescu R.; Marinescu D. St.; Monea M.; Stroe M.- Matematică de excelență pentru concursuri și centru de excelență clasa a VI-a, Editura Paralela 45, 2013.
6. Țițeica G.- Probleme de geometrie. Editura Tehnică București, 1961.
7. Colecția “Gazeta Matematică” (G.M) 1990-2017.
8. Colecția “Revista matemaitcă a elevilor din Timișoara” (R.M.T) 1990-2017.
9. Colecția de volume dedicată Olimpiadei de Matematică, Editura Paralela 45.

Gheorghe Căiniceanu (coord.)

Emilia-Ștefãnia Răducan,Gabriela Roxana Bondoc, Carmen-Victorița Chirfot, Mariana Draga-Tătucu, Iuliana Gimoiu, Dan Nanuți, Dana-Mariana Paponiu,

Vasile-Doru Preșneanu, Elena Râmniceanu, Tomiță-Constantin Vasile

Cuprins

UNIVERSITAS • NAPOCENSIS

ROMANIA

PRESA UNIVERSITARĂ

ISBN: 978-606-37-0412-3